Драгољуб Милошевић

РАЗНИ ДОКАЗИ ТЕОРЕМЕ ЗА ПРАВИЛАН ДЕВЕТОУГАО

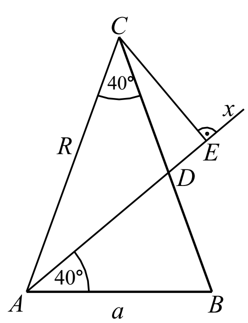
Даћемо шест доказа теореме: *У правилном деветоуглу важи следећа релација*

$$a^3 + R^3\sqrt{3} = 3aR^2, \tag{*}$$

где су a страница и R полупречник описане кружнице око тог многоугла.

Доказ 1. Правилан деветоугао може да се разложи на 9 једнакокраких троуглова основице a, крака R и угла при врху од 40° (на слици 1 такав је $\triangle ABC$). Конструишимо полуправу Ax тако да $\angle xAa = 40^\circ$ и на њој одаберимо тачке D и E тако да $D \in BC$ и $CE \perp AE$. Троуглови ABC и ABD су слични, па је $BD : a = a : R$, одакле $BD = \dfrac{a^2}{R}$. То, пак, значи да је

$$CD = R - \frac{a^2}{R}. \tag{1}$$



Сл. 1

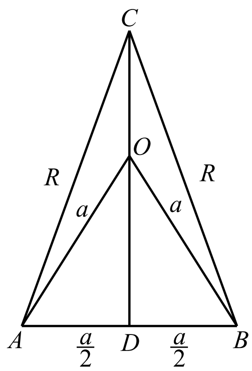
С обзиром да је у правоуглом троуглу ACE угао CAE једнак 30°, имамо $CE = \dfrac{1}{2}R$ и $AE = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$. Из правоуглог троугла CDE, због $CE = \dfrac{1}{2}R$ и $DE = \dfrac{R}{2}\sqrt{3} - a$, добијамо

$$CD^2 = \left(\frac{R}{2}\sqrt{3} - a\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2. \tag{2}$$

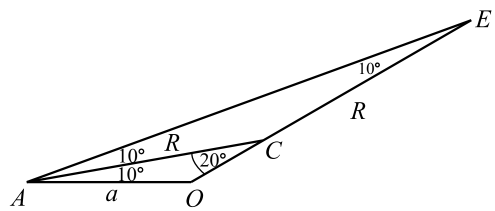
На основу једнакости (1) и (2) добијамо тражену релацију $(*)$.

Доказ 2. На висини CD троугла ABC одредимо тачку O тако да је $OA = AB = a$ (сл. 2). На основу косинусне теореме примењене на троугао OAC је

$$R^2 = a^2 + x^2 + ax\sqrt{3}, \tag{3}$$



Сл. 2



Сл. 3

јер је $OC = x$ и $\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Продужимо страницу OC за $CE = R$ (O–C–E). Троуглови AOC и AOE су слични (сл. 3), па је $a : x = (x + R) : a$, тј.

(4) $$a^2 = x(x + R).$$

Заменом $x^2 = a^2 - xR$ у (3) добијамо

(5) $$x = \frac{R^2 - 2a^2}{a\sqrt{3} - R}.$$

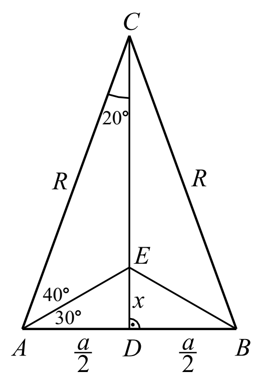
Из једнакости (4) и (5) добијамо релацију (∗) коју доказујемо.

Доказ 3. На основу косинусне теореме примењене на $\triangle ACD$ (сл. 1) је $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2\,AC \cdot AD \cos 30°$, што је због (1) еквивалентно са

$$\left(R - \frac{a^2}{R}\right)^2 = R^2 + a^2 - aR\sqrt{3},$$

а одавде се изводи $a^3 + R^3\sqrt{3} = 3aR^2$.

Доказ 4. На висини CD троугла ABC одредимо тачку E тако да је $\angle DAE = 30°$ (сл. 4). Ако са x означимо дужину дужи DE, онда је $AE = 2x$, па из правоуглог троугла ADE добијамо $(2x)^2 - x^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$, тј. $DE = \dfrac{a}{6}\sqrt{3}$ и $AE = \dfrac{a}{3}\sqrt{3}$.



Сл. 4

Троугао ABC је очигледно састављен од једнакокраког троугла ABE и два подударна троугла AEC и BCE, па је $P_{ABC} = P_{ABE} + 2P_{AEC}$, тј. $\dfrac{R^2}{2}\sin 40° = \dfrac{a^2}{12}\sqrt{3} + \dfrac{aR}{3}\sqrt{3}\sin 40°$, односно

(6) $$\sin 40° = \frac{a^2}{2R(R\sqrt{3} - 2a)}.$$

На основу косинусне теореме примењене на $\triangle ABC$ је $a^2 = R^2+R^2-2R\cdot R\cos 40^\circ$, односно

$$\cos 40^\circ = 1 - \frac{a^2}{2R^2},$$

а одавде, након квадрирања и замене у основну тригонометријску идентичност, добијамо

$$\sin^2 40^\circ = \frac{a^2}{4R^4}(4R^2 - a^2). \tag{7}$$

Из једнакости (6) и (7) следи $a^2R^2 = (4R^2-a^2)(R\sqrt{3}-2a)^2$, што је еквивалентно са

$$(a - R\sqrt{3})(3aR^2 - R^3\sqrt{3} - a^3) = 0,$$

а одавде, због $a \neq R\sqrt{3}$ следи тражена релација $(*)$.

Доказ 5. Како је $a = 2R\sin 20^\circ$ и $a^2 = 2R^2(1-\cos 40^\circ)$, то множењем ових двеју једнакости добијамо

$$a^3 = 4R^3(\sin 20^\circ - \sin 20^\circ \cos 40^\circ). \tag{8}$$

Због $\sin 20^\circ \cos 40^\circ = \dfrac{1}{2}(\sin 60^\circ + \sin 20^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2}\sin 20^\circ$, једнакост (8) постаје $a^3 = 2R^3(3\sin 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2})$, а одавде имамо $a^3+R^3\sqrt{3} = 6R^3\sin 20^\circ = 3(2R\sin 20^\circ)\cdot R^2$, тј. $a^3 + R^3\sqrt{3} = 3aR^2$.

Доказ 6. С обзиром да важи $a = 2R\sin 20^\circ$, то је тражена једнакост $(*)$ еквивалентна са $\sqrt{3} + 8\sin^3 20^\circ = 6\sin 20^\circ$, односно са $\sin 60^\circ = 3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ$. Последња једнакост је тачна јер је посебан случај познате тригонометријске формуле

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t, \tag{9}$$

за $t = 20^\circ$.

Уопштење. Ако са $a_n = a$ означимо страницу правилног n-тоугла и са R полупречник описане му кружнице, имамо

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2R}.$$

На основу формуле (9) за $t = \dfrac{\pi}{n}$ добијамо

$$\sin\frac{3\pi}{n} = 3\sin\frac{\pi}{n} - 4\sin^3\frac{\pi}{n} = 3\cdot\frac{a}{2R} - 4\cdot\left(\frac{a}{2R}\right)^3,$$

што је еквивалентно са

$$a^3 + 2R^3\sin\frac{3\pi}{n} = 3aR^2. \tag{10}$$

Једнакост $(*)$ се добија из (10) стављањем $n = 9$.