Др Шефкет Арсланагић

ДВА ДОКАЗА ЈЕДНЕ АЛГЕБАРСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ СА КОРЈЕНИМА

Ријеч је о неједнакости са 40. математичке олимпијаде у Пољској а која гласи

$$(1)\qquad \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+acd+abd}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}, \qquad a,b,c,d>0.$$

Очигледно, ради се о оштрој неједнакости. Ево зашто. Имамо због познате неједнакости $A \geqslant G$:

$$\begin{aligned}
\frac{abc+bcd+acd+abd}{4} &= \frac{1}{2}\left(ab\cdot\frac{c+d}{2}+cd\cdot\frac{a+b}{2}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{c+d}{2}+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\cdot\frac{a+b}{2}\right]=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{4}\\
&\leqslant \left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\right)^2\cdot\frac{a+b+c+d}{4}=\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.
\end{aligned}$$

Одавде корјеновањем добијамо неједнакост

$$(2)\qquad \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+acd+abd}{4}} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Но, сада ћемо доказати да важи неједнакост

$$(3)\qquad \frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$

Након квадрирања неједнакости (3) добијамо:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \geqslant \frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}\\
\iff 3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\geqslant 0\\
\iff (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\geqslant 0,
\end{gathered}$$

што је тачно. Вриједи једнакост ако и само ако је $a=b=c=d$.

Дакле, неједнакост (3) је тачна. Међутим, из неједнакости (2) и (3) не слиједи дата неједнакост (1).

Сада ћемо дати два интересантна и неуобичајена доказа дате неједнакости (1).

Доказ 1. Узмимо да је

$$A = a + b + c + d; \quad B = ab + ac + ad + bc + bd + cd;$$
$$C = abc + abd + acd + bcd; \qquad D = abcd.$$

Сада се дата неједнакост може написати у облику $\left(\frac{C}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \left(\frac{B}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$, односно, еквивалентно,

$$\frac{1}{2}C^2 \leqslant \left(\frac{B}{3}\right)^3.$$

Нека је сада

$$B_1 = ab + cd, \quad B_2 = ac + bd, \quad B_3 = ad + bc.$$

Имамо $B = B_1 + B_2 + B_3$, те

$$B_1B_2B_3 = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) = Q + R, \tag{4}$$

гдје је

$$Q = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2,$$
$$R = a^3bcd + ab^3cd + abc^3d + abcd^3.$$

Даље имамо

$$\begin{aligned} C^2 &= (abc + abd + acd + bcd)^2 \\ &= Q + 2(a^2b^2cd + a^2bc^2d + ab^2c^2d + a^2bcd^2 + ab^2cd^2 + abc^2d^2) \\ &= Q + 2BD, \end{aligned}$$

тј.

$$\frac{1}{2}C^2 = \frac{1}{2}Q + BD. \tag{5}$$

Из познате неједнакости $\frac{x^2 + y^2}{2} \geqslant xy$ слиједи

$$\begin{aligned} R &= abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = D\left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + d^2}{2} + \frac{d^2 + a^2}{2}\right) \\ &\geqslant D(ab + bc + cd + da) \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{2}Q = \frac{a^2 + c^2}{2}b^2d^2 + \frac{b^2 + d^2}{2}c^2a^2 \geqslant acb^2d^2 + bda^2c^2,$$

тј. $\frac{1}{2}Q \geqslant D(bd+ac)$ и сада $R+\frac{1}{2}Q \geqslant D(ab+bc+cd+ad)+D(bd+ac)$, тј.

$$R+\frac{1}{2}Q \geqslant BD. \tag{6}$$

Сада имамо из неједнакости између аритметичке и геометријске средине три позитивна борја и (4), (5), (6):

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}B\right)^3 &= \left(\frac{B_1+B_2+B_3}{3}\right)^3 \geqslant B_1B_2B_3\\ &= Q+R = \frac{1}{2}Q+\left(\frac{1}{2}Q+R\right) \geqslant \frac{1}{2}Q+BD = \frac{1}{2}C^2,\\ \left(\frac{1}{3}B\right)^3 &\geqslant \frac{1}{2}C^2,\end{aligned}$$

што је требало доказати.

Вриједи једнакост ако и само ако је $a=b=c=d$.

Доказ 2. Нека A, B, C, D имају значење као у претходном доказу. Тада су $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ нуле полинома (Виетове формуле)

$$P(t)=t^4+At^3+Bt^2+Ct+D.$$

Према Роловој теореми морају због егзистенције четири нуле полинома $P(t)$ постојати три реалне вриједности $-u$, $-v$, $-w \leqslant 0$, тј. $u,v,w \geqslant 0$ тако да је

$$P'(t)=4t^3+3At^2+2Bt+C=4(t+u)(t+v)(t+w),$$

тј.

$$P'(t)=4t^3+4(u+v+w)t^2+4(uv+vw+uw)t+4uvw.$$

Дакле, $\frac{B}{2}=uv+vw+uw$ и $\frac{C}{4}=uvw$ (Виетове формуле за $P'(t)$), па на основу неједнакости $A \geqslant G$ имамо

$$\frac{B}{6}=\frac{uv+vw+uw}{3} \geqslant (uv\cdot vw\cdot uw)^{\frac{1}{3}}=(uvw)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{C}{4}\right)^{\frac{2}{3}},$$

односно $\left(\frac{B}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(\frac{C}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, што смо у претходном доказу видјели да је еквивалентно неједнакости коју доказујемо.

Напомена редакције. Дата неједнакост се може доказати и помоћу Мјурхедове неједнакости, јер се своди на $5T[2,2,2,0]+12T[2,2,1,1] \leqslant T[3,3,0,0]+12T[3,2,1,0]+4T[3,1,1,1]$ (видети, на пример, свеску 42 едиције „Материјали за младе математичаре“ Друштва математичара Србије).