Др Војислав Андрић

РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА НА ВИШЕ НАЧИНА

Квалитетан рад у настави математике подразумева низ поступака који имају за циљ да активирају креативне способности ученика. Један од значајнијих поступака да се то постигне је учење решавањем проблема на више начина, чиме се шире математички видици и повећава репертоар идеја ученика, али и развијају стваралачке способности. У односу на класично учење путем решавања проблема нема неких већих, нових методичких појединости, а специфична разлика је у томе што се за један те исти проблем тражи више идеја. На тај начин се постиже методолошка разноврсност ученика и „тренира" истраживачки дух.

Овај дидактичко-методички модел је добар и због тога што је његова примена могућа фронталним, групним и индивидуалним приступом. Важан део овог методичког модела је презентација решења и треба водити рачуна да она буде добро планирана, разноврсна и ефикасна. Зато је неопходно ученицима објаснити значај решевања једног истог проблема на више начина и предложити да када год је то могуће трагају и за другим решењима датог проблема.

Решавање проблема на више начина илуструјемо на примеру двеју Диофантових једначина.

Задатак 1. Одредити све природне бројеве x и y такве да је њихов збир пет пута мањи од њиховог производа.[1]

Решење 1. Ако се једначина $xy = 5(x+y)$, тј. $xy-5x-5y = 0$, трансформише у $xy-5x-5y+25 = 25$, добија се једначина $(x-5)(y-5) = 25$. Јасно је да $x-5$ може бити 1, 5 или 25, па је $x \in \{6, 10, 30\}$ а сва решења проблема су $(6, 30)$; $(10, 10)$ и $(30, 6)$. Дакле, проблем је решен коришћењем производа.

Решење 2. Из $xy = 5x + 5y$ следи да је $x = \dfrac{5y}{y-5} = 5 + \dfrac{25}{y-5}$. Како је x природан број, то и десна страна једнакости мора бити природан број, па је $y-5$ делилац броја 25, то јест $(y-5) \in \{1, 5, 25\}$. Уређени парови $(6, 30)$; $(10, 10)$ и $(30, 6)$ су решења проблема. Проблем је решен коришћењем количника.

Решење 3. Из једнакости $xy = 5(x+y)$ јасно је да је један од бројева x или y дељив са 5. Нека је $x = 5k$ $(k \in \mathbf{N})$. Тада је $5ky = 5(5k+y)$, тј. $ky = 5k + y$. Следи да је $(k-1)y = 5k$, па је $y = \dfrac{5k}{k-1}$.

[1] Ради боље илустрације ефекта примене учења путем решавања проблема на више начина дајемо по неколико решења оба проблема.

Како су k и $k-1$ узајамно прости бројеви, то је $k-1$ садржано у броју 5, па је $k=2$ или $k=6$, а одговарајуће вредности за x су 10, односно 30. Као решења се добијају уређени парови $(10,10)$ односно $(30,6)$. Ако се узме да је $y=5m$ ($m \in \mathbf{N}$), сличним разматрањем се као решења добијају парови $(10,10)$ и $(6,30)$, па су сва решења дате једначине $(6,30)$; $(10,10)$; $(30,6)$, а до решења се дошло коришћењем дељивости бројева.

Решење 4. Из $xy=5(x+y)$ дељењем са $5xy$ добија се $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$. Јасно је да су x и y природни бројеви већи од 5. Ако, не умањујући општост, претпоставимо да је $x \leqslant y$, онда је $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$, па је $\dfrac{2}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{2}{x}$. Следи да је $x \leqslant 10$, дакле $6 \leqslant x \leqslant 10$. Заменом вредности 6, 7, 8, 9 и 10 у полазну једнакост добија се да је y природан број само у случајевима $x=6$ и $x=10$. Дакле, као решења се добијају уређени парови $(10,10)$, односно $(6,30)$. Ако се узме да је $y \leqslant x$, онда се, сличним разматрањем, као решења добијају парови $(10,10)$ и $(30,6)$, па су сва решења дате једначине $(6,30)$; $(10,10)$; $(30,6)$. Пут до решења остварен је помоћу неједнакости. $\triangle$

Задатак 2. Одредити све целе бројеве x и y такве да је $x^2+xy+y^2=x^2y^2$. Проблем решити на бар три различита начина.

Како је једначина симетрична, то је очигледно да ако је (x,y) решење, онда је и (y,x) решење. Такође, ако је (x,y) решење, онда је решење и $(-x,-y)$, па је довољно наћи она решења код којих је бар један од бројева x и y ненегативан, а сва решења добити коришћењем претходних закључака.

Решење 1. Како је $x^2+xy+y^2=x^2y^2$, то је $x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy$, па се добија да је $(x+y)^2=xy(xy+1)$. Бројеви xy и $xy+1$ су узастопни, па су и узајамно прости. Како је лева страна једнакости потпун квадрат, то мора бити и десна и то је могуће само у случају када је један од бројева xy и $xy+1$ нула. Могућа решења дате једначине добијају се ако је $xy=0$ или $xy=-1$. Тада је $(x,y) \in \{(0,0);(1,-1);(-1,1)\}$, што су заиста решења дате једначине.

Решење 2. Како је $x^2+xy+y^2=x^2y^2$, то је $\dfrac{x^2}{y}+x+y=x^2y$, па је очигледно да је $x=ky$ ($k \in \mathbf{N}$). Тада се добија $k^2y+ky+y=k^2y^3$, па се разликују два случаја. Ако је $y=0$, онда је и $x=ky=0$. Ако је $y \neq 0$, онда је $k^2y^2=k^2+k+1$, па број k^2+k+1 мора бити потпун квадрат. Како је то могуће само ако је $k=0$ или $k=-1$, то је $x=0$ или $x=-y$. Прва могућност отпада (због $y \neq 0$), а друга даје решења $y=1$ или $y=-1$. Тада је $x=-1$, односно $x=1$, па су сва решења $(x,y) \in \{(0,0);(1,-1);(-1,1)\}$.

Решење 3. Како је $x^2+xy+y^2=x^2y^2$, то је $(1-y^2)x^2+xy+y^2=0$. Дата једначина има целобројних решења само ако је њена дискриминанта $y^2-4(1-y^2)y^2$ потпун квадрат, то јест ако је $1-4(1-y^2)=k^2$. Решеавањем једначине $4y^2-k^2=3$ добијају се решења $y=1$ и $y=-1$, па су могућа решења једначине, поред тривијалног $(0,0)$, још и $(1,-1)$; $(-1,1)$. Провера показује да су то заиста решења дате једначине. Решење је добијено коришћењем дискриминанте.

Решење 4. Ако је $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$, то се за $x = 0$ и $|x| = 1$ или $|y| = 1$ добијају решења $(0,0)$; $(1,-1)$ и $(-1,1)$. Ако је $|x| \geqslant 2$ и $|y| \geqslant 2$, дата једначина је еквивалентна са једначином $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{y^2} = 1$. Како је тада $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{y^2} \leqslant \dfrac{3}{4} < 1$, то једначина нема више решења. Према томе решења дате једначине су $(x,y) \in \{(0,0);(1,-1);(-1,1)\}$. Решење је добијено коришћењем неједнакости.

Оба примера показују да решавање проблема није праволинијски посао и да један исти задатак може бити решен коришћењем различитих поступака који воде ка лакшем раздвајању могућих случајева. У изложеним примерима су коришћени производ, количник, дељивост, неједнакости и дискриминанта, при чему је сигурно да постоје и друга решења која својом концизношћу и елеганцијом не заостају за претходним.

Литература

1. В. Андрић: *Диофантове једначине – приручник за додатну наставу у основним и средњим школама*, „Круг“, Београд, 2006.

ОБАВЕШТЕЊА

САСТАНАК САВЕТА МАТЕМАТИЧКОГ ДРУШТВА ЈУГОИСТОЧНЕ ЕВРОПЕ И КОНГРЕС МАТЕМАТИЧАРА

У Атини је 24. марта 2007. године одржан редовни састанак Савета Математичког друштва Југоисточне Европе (Mathematical Society of Southeastern Europe, MASSEE). Састанку су присуствовали представници седам од девет земаља-чланица (Босна и Херцеговина, Бугарска, Грчка, Кипар, Македонија, Румунија и Србија, одсутни су били Албанија и Молдавија). Поднети су извештаји о активностима у претходне две године, између осталог о 2. конгресу MASSEE који је 2006. године одржан на Кипру, као и о редовно одржаним такмичењима (Балканске и Јуниорске балканске математичке олимпијаде). Најављено је одржавање Прве јуниорске балканске информатичке олимпијаде, јула 2007. године у Београду.

Донета је одлука да се следећи, 3. конгрес MASSEE под називом **MICOM-2009** одржи 2009. године у Охриду (Македонија).

Изабран је нови Извршни одбор у саставу: Стефан Додунеков (Бугарска), председник, Nikolaos Alexandris (Грчка), потпредседник, Gregory Makrides (Кипар), потпредседник, Panayiotis Vlamos (Грчка), генерални секретар, Argyris Fellouris (Грчка), благајник, Зоран Каделбург (Србија), члан и Весна Манова-Ераковић (Македонија), члан.