НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2007, LII, 2–3, стр. 1–14

академик Григориј Д. Глејзер

ПРИРОДНИ И РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Прегледна предавања у 10. разреду

Уводне напомене

Реализација идеје развитка појма броја прожима читаву методичко-садржајну линију школског курса математике, појављујући се у мањем или већем обиму у свим разредима средње школе. То у потпуности одговара улози броја као фундаменталног појма у савременој математици. Број представља најважније средство помоћу којег човек спознаје квантитативне односе реалног света. У процесу изучавања разних бројевних система долази до активног математичког развоја ученика, обогаћују се њихове представе, не само о унутрашњим законима развоја математичких идеја, већ и о вези математике с практичним потребама, формира се и усавршава њихова култура рачунања. Фактички, довољно добра знања о својствима бројевних скупова могу да омогуће успешно овладавање, како целим школским курсом „Алгебра и почеци анализе“, већ и сваке од његових тема.

У обичној, непрофилисаној школи посебно проучавање бројевних система завршава се у деветом разреду проучавањем реалних бројева. У школама (или одељењима) математичког усмерења, на факултативним часовима и секцијама, проучавају се и комплексни бројеви. У многим пројектима школских програма предлаже се да се основне чињенице о комплексним бројевима уче у некој форми и у непрофилисаним одељењима.

Дуго, вишевековно проучавање бројева довело је до нагомилавања важних знања о њиховим својствима и операцијама са бројевима. Као математичке теорије, та знања су била оформљена тек у другој половини XIX века као део процеса изучавања проблема везаних са заснивањем саме математике. У савременој теорији, процес проширивања појма броја спроводи се следећим редом:

- природни бројеви;
- цели бројеви;
- рационални бројеви;
- реални бројеви;
- комплексни бројеви;
- хиперкомплексни бројеви, посебно кватерниони.

Превод чланака «*Изучение действительных чисел. 1. Натуральные числа; 2. Рациональные числа*» из додатка „Математика“ часописа «Первое сентября», бр. 47 и 48 од децембра 1995.

Сваки од бројевних скупова има структуру одређене врсте, тј. посматра се заједно са релацијама и операцијама између његових елемената. У свакој варијанти учења бројевних система у школи, преглед особина реалних бројева даје се у старијим разредима. Обично таквим прегледом почиње курс десетог разреда.

Препоручујемо следећи план наставе по теми „*Реални бројеви*“:

1. природни бројеви;
2. рационални бројеви;
3. реални бројеви.

Сваки час може представљати прегледно предавање. Постоји неколико принципијелно различитих варијанти методике излагања ових питања. Показаћемо да се све тачке тог плана у разним разредима могу методички реализовати приближно подједнако, али с различитом дубином.

При томе је врло важно да се ученици који показују повишени интерес ка математици, упознају с принципом проширења, који се примењује не само при изучавању бројевних система, већ у алгебри уопште. Природни бројеви представљају основу из које се конструктивним путем могу добити сви други скупови бројева. Помоћу природних бројева постепено се дефинишу цели, рационални, реални и комплексни бројеви. Сваки од поменутих скупова бројева садржи претходни. При томе се конструише проширење које ома одређена својства у односу на скуп који се проширује. Формулишимо та *својства.*

Ако се скуп A проширује до скупа B, морају да буду задовољени следећи услови:

1) скуп A је подскуп скупа B;

2) релације између елемената скупа A, као и операције са њима, дефинисане су и за елементе скупа B; смисао тих релација и операција за елементе скупа A, који се посматрају већ као елементи скупа B, исти је који је био и кад су они посматрани као елементи скупа A;

3) у скупу B се може извести нека операција која је у скупу A неизводљива, или је делимично изводљива;

4) проширење B мора бити минимално међу свим проширењима датог скупа A која имају претходна три својства, при чему је то проширење B дефинисано скупом A једнозначно (с тачношћу до изоморфизма).

Објаснимо, на пример, смисао својства 3. У скупу природних бројева није увек дефинисано одузимање; у скупу целих бројева је та операција увек изводљива. У скупу целих бројева није увек изводљиво дељење; у скупу рационалних бројева дељење је изводљиво увек, осим дељења нулом. За рационалне бројеве није увек изводљив прелаз на граничну вредност; у скупу реалних бројева тај прелаз је увек изводљив. У скупу реалних бројева није увек изводљива операција извлачења корена; у скупу комплексних бројева таква операција је увек изводљива.

Сагласно својству 4 ми, на пример, проширујемо скуп природних бројева до скупа целих бројева, а не одмах до скупа реалних бројева.

1. Природни бројеви

Број је најважнији математички појам. Тај појам се појавио још у првобитној заједници у процесу практичне људске активности, везане с потребом пребројавања предмета или појава (оруђа, људи, животиња, дана итд). Тако је човек научио неколико првих природних бројева. С развојем друштва, људима је постајало потребно да користе све веће и веће природне бројеве. Постепено се током многих векова стварала свест о бесконачности скупа природних бројева. Још у III веку п.н.е. људи нису имали представу о бесконачности низа природних бројева. Приближно у то време, у античкој Грчкој је највећи број који је имао своје име био број 10 000 (њега су називали „мериада“). Архимеду (287–212 п.н.е) се приписује једно од првих разматрања у којем се показује бесконачност низа природних бројева. У трактату *„Пребројавање зрна песка“* – *„Псамит“* – он показује како се може изразити произвољно велики природан број. Ипак, треба рећи да се идеја бесконачности постепено стварала много раније, у далекој прошлости, у вези с представом устројства Свемира. Тако су у VI веку п.н.е. грчки филозофи (Анаксимандар, Анаксагора, Анаксимен), а касније Аристотел (384–322 п.н.е) и други разрађивали проблем бесконачности и, повезане с њим, проблеме непрекидности и дискретности. Управо је с филозофском представом бесконачности повезан настанак математичке бесконачности као једне од математичких апстракција.

Постепено је у вези с потребом упоређивања броја предмета једног вида с бројем предмета другог вида постало нужно увести појмове као што су „једнако“, „веће“, „мање“. Појаву тих појмова историчари везују за почетни период размене произведених објеката. Врло је могуће да су људи у том периоду почели да сабирају бројеве. Много касније су научили да одузимају, множе и деле. На пример, чак у средњем веку вештина дељења бројева била је знак високог образовања. Тако је постепено настала аритметика – наука о бројевима и операцијама с њима. Њен настанак и развој су везани с практичним људским потребама – земљорадњом, машинством, морепловством, трговином, развојем привреде уопште.

Сва израчунавања у скупу *природних бројева* заснована су на следећим законима сабирања и множења:

1) $a + b = b + a$ – комутативни закон сабирања;
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ – асоцијативни закон сабирања;
3) $ab = ba$ – комутативни закон множења;
4) $a(bc) = (ab)c$ – асоцијативни закон множења;
5) $a(b + c) = ab + ac$ – дистрибутивни закон множења према сабирању;
6) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ – постоји неутрални елемент множења.

* * *

Приближно овакав би могао бити садржај предавања ученицима *групе А* (општекултурни и примењени ниво). У *групи Б* (специјализовани ниво) предавање би се могло наставити у следећем смеру.

* * *

У савременој математици се скуп природних бројева уводи аксиоматски. Посматрајмо неки непразан скуп **N**. За неке елементе a и b тог скупа уведимо релацију „b следи иза a“. Број који следи броју a означимо са a^*. Уведимо *четири аксиоме*:

1. Постоји природан број 1 који не следи ниједном природном броју, тј. за свако a важи $a^* \neq 1$.
2. За сваки природан број a постоји тачно један број који за њима непосредно следи, тј. ако је $a = b$, онда је $a^* = b^*$.
3. Сваки природан број осим 1 непосредно следи тачно једном природном броју, тј. ако је $a \neq 1$, онда из $a^* = b^*$ следи да је $a = b$.
4. *Аксиома индукције.* Нека је M подскуп скупа **N** природних бројева који има својства: а) 1 припада M; б) ако природан број a припада M, тада и a^* припада M. Тада скуп M садржи све природне бројеве, тј. поклапа се са скупом **N**.

Навели смо савремену аксиоматику скупа природних бројева. Приметимо да је аксиоме природних бројева, у нешто другачијем виду, први формулисао италијански математичар Ђ. Пеано у раду „*О појму броја*“ објављеном 1891. године.

Помоћу горе наведених аксиома могу се дефинисати аритметичке операције на скупу природних бројева, доказати њихова својства и дедуктивним путем конструисати аритметика природних бројева. Постоји и друга теорија природних бројева коју је развио Г. Кантор (1845–1918) и која је заснована на интуитивној теорији скупова.

На основу аксиоме индукције може се доказати *принцип математичке индукције*:

ако је неко тврђење M у чијој формулацији учествује природан број n, тачно за $n = 1$ и из претпоставке да је оно тачно за $n = k$ следи да је тачно и за $n = k+1$, онда је тврђење M тачно за сваки природан број.

Овај принцип лежи у основи метода математичке индукције који има широку примену у математици и у суштини представља дедуктивни метод доказивања многих теорема аритметике, алгебре, геометрије. Пре него што наведемо примере доказивања методом математичке индукције, размотримо подробније суштину самог метода.

Тврђење у којем се говори о природном броју n, означимо са $A(n)$. Нека треба доказати да то тврђење важи за сваки природан број n, тј. да је

$$A(n) \text{ – истинито тврђење.}$$

Доказ методом математичке индукције састоји се из три дела:

а) најпре треба доказати да је тврђење $A(n)$ тачно за $n = 1$, тј. да је тачно тврђење $A(1)$ (на тај начин се ствара „*база индукције*“); приметимо да база индукције може бити и неки број n различит од 1;

б) даље, треба претпоставити да је тврђење $A(n)$ тачно за неки природан број k, тј. да је $A(k)$ истинито тврђење (формулише се „*индуктивна претпоставка*“);

в) најзад, треба доказати да из истинитости $A(k)$ следи истинитост $A(k+1)$ (остварује се „*индуктивни корак*“). После тога се закључује да на основу принципа математичке индукције следи да је тврђење $A(n)$ истинито за сваки природан број n.

Прилог 1.

Размотримо сада примере примене принципа математичке индукције.

Пример 1. Доказати неједнакост $2^n > 2n+1$ за $n > 2$.

Доказ. Означимо дату неједнакост са $A(n)$.

1) За $n = 1$ имамо $2 > 3$; тврђење $A(1)$ је нетачно; за $n = 2$ имамо $4 > 5$; тврђење $A(2)$ је нетачно; за $n = 3$ имамо $8 > 7$; тврђење $A(3)$ је тачно.

База индукције је $n = 3$.

2) Претпоставимо да је тврђење $A(n)$ тачно за неко $n = k > 2$, тј. тачна је неједнакост $2^k > 2k+1$ за $k > 2$.

3) Докажимо да је при таквој претпоставци тачно и тврђење $A(k+1)$, тј. да је тачна неједнакост

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1 \quad \text{за } k > 2.$$

Важи:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2\cdot 2^k > 2(2k+1) = 4k+2 = (2k+3)+(2k-1) \\ &= 2(k+1)+1+(2k-1) > 2(k+1)+1. \end{aligned}$$

Последња неједнакост следи из тога што за $k > 2$ важи неједнакост $2k-1 > 0$. На тај начин је доказано да из тачности претпоставке $A(k)$ за $k > 2$ следи тачност тврђења $A(k+1)$. Тако је полазна неједнакост доказана методом математичке индукције.

Пример 2. Доказати да се збир S_n првих n чланова аритметичке прогресије (a_n) с разликом d изражава формулом

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\, n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Доказ. Означимо формулу (1) са $A(n)$.

1) За $n = 1$ имамо $S_1 = \dfrac{2a_1 + 0}{2} \cdot 1 = a_1$; тврђење $A(1)$ је тачно. База индукције је за $n = 1$.

2) Претпоставимо да је тврђење $A(n)$ тачно за неко $n = k$, тј. да важи формула

$$S_k = \frac{2a_1 + (k-1)d}{2}\, k.$$

3) Докажимо да је формула (1) тачна за $n = k + 1$, тј. да важи

$$S_{k+1} = \frac{2a_1 + kd}{2}(k + 1).$$

Имамо

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} = \frac{2a_1 + (k-1)d}{2} \cdot k + (a_1 + kd) \\ &= \frac{2a_1 k + k^2 d - kd + 2a_1 + 2kd}{2} = \frac{2a_1 k + k^2 d + kd + 2a_1}{2} \\ &= \frac{2a_1 + kd}{2}(k + 1). \end{aligned}$$

И тако је формула (1) доказана методом математичке индукције. У доказу смо користили израз за n-ти члан аритметичке прогресије: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Важни момент у предавању о скупу природних бројева може бити прича о томе да су многи проблеми о природним бројевима представљали и још увек представљају интерес за математичаре. Неки од тих проблема нису до данас решени. И што дубље будемо проницали у устројство низа природних бројева, то ће се сложенији проблеми јављати пред математичком науком.

На крају предавања о скупу природних бројева наведимо избор задатака које препоручујемо за самосталан рад.

Вежбања

1. Формулишите аксиоме скупа **N** природних бројева.

2. Формулишите основне законе сабирања и множења природних бројева.

3. Опишите план провођења доказа методом математичке индукције.

4. Дата је аритметичка прогресија (a_n) с разликом d. Докажите да је $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

5. Докажите неједнакост $2^n > n^3$ за $n > 9$, $n \in \mathbf{N}$.

6. Докажите да је број $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ дељив са 19 за свако природно n.

7. Докажите да је $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$, $n \in \mathbf{N}$.

8. Докажите да је $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$, $n \in \mathbf{N}$.

9. Докажите да је $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{4}n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$, $n \in \mathbf{N}$.

10. Докажите да је $2 + 16 + 56 + \cdots + (3n - 2)2^n = 10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

11. Докажите да је $5 + 45 + 325 + \cdots + (4n + 1)5^{n-1} = n \cdot 5^n$, $n \in \mathbf{N}$.

12. Докажите да је $7^n + 3n - 1$ умножак броја 9 за $n \in \mathbf{N}$.

13. Докажите да је $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ умножак броја 17 за $n \in \mathbf{N}$.

14. Докажите неједнакост $3^n \geqslant 2^n + n$, $n \in \mathbf{N}$.

15. Докажите неједнакост $4^n > 3^n + 2^n$, $n \in \mathbf{N}$.

16. Докажите да је $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, $n\in\mathbf{N}$.

17. Докажите да је $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$, $n\in\mathbf{N}$.

18. Докажите да је $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$, $n\in\mathbf{N}$.

19. Докажите да је $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$, $n\in\mathbf{N}$.

20. Докажите да је $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$, $n\in\mathbf{N}$.

21. Докажите да је $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $n\in\mathbf{N}$.

22. Докажите да је $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$, $n\in\mathbf{N}$.

23. Докажите да n правих једне равни које садрже једну тачку деле ту раван на $2n$ делова.

24. Докажите да n кружница једне равни разбијају ту раван на n^2-n+2 дела, ако се сваке две од њих секу у двема тачкама и никој три не пролазе кроз исту тачку.

2. Рационални бројеви

Прво проширивање појма природног броја било је додавање *разломљених бројева* скупу природних бројева. Појава разломљених бројева везана је с потребом мерења величина. Мерење било које величине састоји се у њеном упоређивању с другом, њој квалитативно хомогеном величином коју узимамо за јединичну. На пример, при мерењу дужине одсечка, на њега се узастопно наноси други одсечак који се узима да има јединичну дужину (1 cm, 1 m итд). Јасно је да се неће увек јединични одсечак садржати цео број пута у одсечку који се мери. Тако настаје потреба посматрања разломака – половина, трећина, четвртина и других делова јединице мерења.

С развојем аритметике – науке о бројевима и операцијама с њима – људи су почели да разматрају разломљене бројеве (или *разломке*) с произвољним природним имениоцима и да представљају раломљени број као количник дељења двају таквих природних бројева, при чему дељеник није дељив делиоцем. Уопште, обичним разломком се назива број облика $\frac{m}{n}$, где су m и n природни бројеви.

Два разломка $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се сматрају *једнаким* ако је $ad=bc$. Користећи ову дефиницију, лако је доказати да су разломци $\frac{a}{b}$ и $\frac{an}{bn}$ такође једнаки. Одатле следи основно својство разломака:

ако се бројилац и именилац разломка помноже истим природним бројем, добија се разломак једнак датом:

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}.$$

Помоћу основног својства разломака, један исти разломљени број се може на разне начине представити помоћу обичних разломака, на пример

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{20}{30} = \cdots$$

Даље проширење појма о броју било је изазвано потребама саме математике. У вези с решавањем линеарних једначина с једном непознатом постало је неопходно увођење *негативних бројева.* У конкретним задацима негативан одговор тумачен је као вредност усмерене величине (позитивна и негативна температура, кретање у смеру супротном од изабраног, приход и дуг итд).

Древногрчки математичари користили су се, како природним бројевима, тако и позитивним разломљеним бројевима, али нису знали за негативне бројеве. Прво коришћење негативних бројева (схваћених као „дуг“, у супротности са позитивним, схваћеним као „приход“) јавља се код Индуса, у радовима из VI и VII века. Савремене ознаке „+“ и „−“ за означавање позитивних и негативних бројева увео је немачки математичар Видман крајем XIV века. Али, чак и у XVI веку, многи математичари нису признавали негативне бројеве.

Посебно јасно је истакнут смисао негативних бројева увођењем координатне праве и координатне равни. Важан моменат у математици било је увођење *броја нула.* Додавање нуле, као и негативних бројева скупу **N** доводи до *скупа свих целих бројева.*

Скуп целих бројева (позитивних целих, нуле и негативних целих) означаваћемо словом **Z**:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Док су у скупу **N** изводљиве само две операције – сабирање и множење, у скупу **Z** се без ограничења могу изводити три операције: сабирање, одузимање и множење. Посебно, за произвољне природне бројеве a и b, једначина $a + x = b$ је увек решива, али је само за $b > a$ вредност x природан број, док је за $b < a$ она негативна. За целе бројеве, као и за природне, дефинисане су неједнакости које се лако визуелно приказују представљањем бројева тачкама бројевне праве. Тако неједнакост $a > b$ означава да се тачка која одговара броју a налази десно од тачке која одговара броју b.

Дељење није неограничено изводљива операција у скупу **Z**. На пример, једначина $2x = 3$ нема решења у скупу **Z**. Управо је жеља да се постигне решивост једначина првог степена довела до увођења скупа рационалних бројева. Унија скупа целих и скупа разломљених бројева назива се *скупом рационалних бројева.* Скуп рационалних бројева означавамо са **Q**. Латинска реч *ratio* означава „однос“.

Сваки рационалан број може се представити у облику $\frac{p}{q}$, где су p и q цели бројеви (позитивни или негативни), при чему је $q \neq 0$. Приметимо да је такво представљање рационалног броја нееднозначно. На пример, разломци $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{14}$ итд. представљају једнаке бројеве (односно, један те исти број). Горе наведена дефиниција једнакости разломака омогућава да се одреди у ком случају два разломка $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ представљају један те исти број. То ће бити тада и само тада када је $ad = bc$.

У скупу $\mathbf{Q}$ су изводљиве без ограничења све четири аритметичке операције: сабирање, одузимање, множење, дељење. У ствари, постоји једно ограничење – не може се делити нулом. Важно је указати ученицима да се извођење операција с рационалним бројевима своди на извођење операција с целим бројевима. Тако, ако је $r = \frac{a}{b}$ и $s = \frac{c}{d}$, онда је

$$\begin{aligned} r + s &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \\ r - s &= \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}, \\ rs &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \\ r : s &= \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}. \end{aligned}$$

* * *

На овом месту се може завршити предавање ученицима групе А и прећи на вежбања (она су дата у прилогу чланка). С ученицима групе Б предавање се може продужити.

* * *

Корисно је почети понављањем извесних својстава аритметичких операција над рационалним бројевима:

1) $r + s = s + r$ – комутативни закон сабирања;
2) $r + (s + t) = (r + s) + t$ – асоцијативни закон сабирања;
3) $r + 0 = r$;
4) $r + (-r) = 0$;
5) $rs = sr$ – комутативни закон множења;
6) $r(st) = (rs)t$ – асоцијативни закон множења;
7) $1 \cdot r = r$;
8) $r \cdot \frac{1}{r} = 1$;
9) $(r + s)t = rt + st$ – дистрибутивни закон.

Својства 3, 4, 7, 8 су правила рачунања с нулом и јединицом. На пример, својство 4 тврди да за сваки рационалан број r постоји такав рационалан број $-r$ који у збиру са r даје нулу.

Сав рачун у скупу рационалних бројева, а такође и све идентичке трансформације, засновани су на својствима 1–9 аритметичких операција над рационалним бројевима. Користећи та својства, није тешко доказати, на пример, да важе једнакости $r(s-t)=rs-st$, $(r+s)^2=r^2+2rs+s^2$ итд. Из једнакости $r(s-t)=rs-rt$ за $s=t$ следи да је $r\cdot 0=0$, тј. производ сваког броја нулом једнак је нули. Важно је такође приметити да из својстава 1–9 аритметичких операција могу да се изведу својства операција са степенима с природним изложиоцем:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad a^m:a^n=a^{m-n},\quad (m>n);\quad (a^m)^n=a^{mn}.$$

У скупу $\mathbf{Q}$ рационалних бројева, као и у скупу $\mathbf{Z}$ целих бројева, уводе се неједнакости. То се може урадити на следећи начин.

Најпре се даје дефиниција: рационалан број се назива позитивним ако се он представља као количник двају природних бројева; рационалан број, различит од нуле, наизва се негативним ако није позитиван.

Затим се постулирају својства позитивних и негативних бројева:

10) ако је r позитивно, тада је $-r$ негативно;

11) ако су r и s позитивни, онда је $r+s$ позитивно;

12) ако су r и s позитивни, онда је rs позитивно.

Сада се могу увести неједнакости. Број r се сматра већим од броја s (пише се $r>s$ или $s<r$) ако је разлика $r-s$ позитиван број. Посебно, ако је број r позитиван, онда је $r>0$, а ако је број s негативан, онда је $s<0$.

Користећи својства 10–12 могу се доказати теореме о неједнакостима. Наведимо примера ради доказ једне такве теореме.

Теорема. *Ако је $r_1>s_1$ и $r_2>s_2$, онда је $r_1+r_2>s_1+s_2$.*

Доказ. По дефиницији, неједнакост $r_1>s_1$ означава да је r_1-s_1 позитивно. На исти начин, неједнакост $r_2>s_2$ означава да је r_2-s_2 позитивно. На основу својства 11, број $(r_1-s_1)+(r_2-s_2)$ је позиитиван. А то значи да је и број $(r_1+s_1)-(r_2+s_2)$ позитиван. Следи да је, по дефиницији, $r_1+r_2>s_1+s_2$. ■

Из својстава 1–12 следе сва својства идентичких трансформација, а такође и теореме о неједнакостима, везане с извођењем четири основне аритметичке операције. Захваљујући својствима 10–12 скуп рационалних бројева је уређен појмовима „веће“ и „мање“.

Важно је запазити још једно својство рационалних бројева: између свака два рационална броја налази се бесконачно много рационалних бројева. Заиста, ако су a и b различити рационални бројеви и $a<b$, онда рационалан број $\dfrac{a+b}{2}$ лежи између њих: $a<\dfrac{a+b}{2}<b$. Поступајући аналогно даље, може се доказати да се између a и b налази бесконачно много рационалних бројева.

Сваком рационалном броју одговара јединствена тачка координатне праве, при чему двама различитим рационалним бројевима одговарају две различите тачке. Без обзира на то што рационални имају својство густине, они ипак не „испуњавају“ целу координатну праву, тј. постоје тачке на правој којима не одговара ниједан рационалан број.

Посебно важну улогу у математици и пракси имају децимални разломци. Познато је да се сваки природан број може на јединствен начин раставити на просте чиниоце. Ако се растављање имениоца обичног разломка на просте чиниоце састоји само од двојки, или само од петица, или само од двојки и петица, тада се такав разломак може записати у облику коначног децималног разломка. На пример, $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} = 0{,}6$; $\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 0{,}35$; $\frac{9}{5} = \frac{9 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{18}{10} = 1{,}8$. Исти резултат се може добити дељењем бројиоца разломка имениоцем.

Ако је, пак, дати обичан разломак нескратљив и разлагање имениоца на просте чиниоце садржи бар један број различит од двојке и петице, тада се такав број може записати у облику бесконачног периодичног децималног броја, тј. децималног броја код којег је број децималних знакова бесконачан и једна цифра или неколико цифара после запете се стално понављају. Представимо, на пример, обичан разломак $\frac{2}{3}$ у виду децималног разломка. Поделивши број 2 бројем 3 добијамо $0{,}6666\ldots$. Тај бесконачан разломак називамо перодиочним; цифру 6 називамо периодом раломка. Краткоће записа ради, период се записује само једном, с тим да се окружи заградама. На пример, $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots = 0{,}(6)$ (чита се: „нула целих и 6 у периоди“). Период у разломку може да не почиње одмах иза запете, и да садржи више од једне цифре. На пример, $2\frac{16}{15} = 2{,}3(5)$; $\frac{5}{11} = 0{,}(45)$.

Разлог појављивања периодичних децималних разломака је у томе што је при дељењу природних бројева остатак увек мањи од делиоца. Због тога број различитих остатака не може бити већи од делиоца. Почев од неког места остаци обавезно почињу да се понављају, а заједно с њима и цифре количника, и цео процес дељења се понавља у истом поретку. Зато се у количнику појављује период – група цифара која се понавља. На пример, при претварању разломка $\frac{85}{101}$ у децимални, тј. при дељењу броја 85 са 101, могуће је добити 100 остатака (од 1 до 100); у ствари биће их само четири (85, 42, 16, 59). Дакле, у резултату ће се појавити периодични децимални разломак с четири цифре у периоди: $\frac{85}{101} = 0{,}(8415)$.

Ако се у процесу дељења бројиоца разломка имениоцем појави остатак једнак нули, а процес дељења се настави, тада ће сви даљи остаци и све цифре колчиника бити нуле. Зато се природни бројеви, нула и коначни децимални разломци могу сматрати бесконачним децималним разломцима са периодом који се састоји од нуле: $2 = 2{,}000\ldots = 2{,}(0)$; $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 0{,}4(0)$ итд.

Договор је и да се децимални бројеви с периодом 9 замењују бројевима с периодом 0: $0{,}(9) = 1{,}(0)$.

Важно је да у овој етапи учења ученици разматрањем конкретних примера усвоје следеће:

1) сваки рационалан број се може представити у облику бесконачног периодичног децималног разломка;

2) сваки периодични децимални разломак може се представити у облику обичног разломка, тј. сваки периодични децимални разломак је рационалан број.

Прво тврђење смо показали лако. Ученицима групе Б може се на посебним примерима показати поступак доказа другог тврђења.

Пример. Представити у облику обичног разломка периодични децимални разломак 0,(8).

Решење. Имамо да је

$$0{,}(8) = 0{,}888\ldots = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \cdots = \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \cdots.$$

Ово је збир чланова бесконачне опадајуће геометријске прогресије чији је први члан $\frac{8}{10}$ а количник $\frac{1}{10}$. Користећи формулу за суму чланова такве прогресије добијамо

$$0{,}(8) = \frac{8}{10} : \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{8}{10} : \frac{9}{10} = \frac{8}{9}.$$

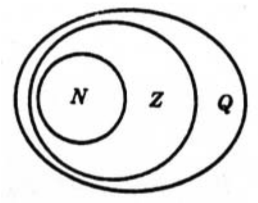
Дакле, $0{,}(8) = \frac{8}{9}$.

Ученицима се може без доказа формулисати правило превођења периодичног децималног разломка у обичан: разломљени део периодичног броја једнак је обичном разломку чији је бројилац једнак броју који стоји између децималне запете и почетка друге периоде, минус број који стоји између запете и почетка прве периоде, док је именилац једнак броју који се састоји од онолико узастопних цифара 9 колико је цифара у периоди и онолико нула колико је цифара између запете и прве периоде. На пример,

$$0{,}2(31) = \frac{231 - 2}{990} = \frac{229}{990}; \qquad 3{,}75(6) = 3\frac{756 - 75}{900} = 3\frac{681}{900}.$$

Не треба памтити наведено правило, оно се може користити из подсетника. Међутим, појединим ученицима се може дати домаћи задатак да изведу то правило у општем облику, посебно за чисто периодичне и посебно за мешовито периодичне разломке.

У закључку предавања треба у виду дијаграма представити однос међу скуповима бројева: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ (слика).



Класификација скупа рационалних бројева може се извршити према њиховом положају на бројевној правој у односу на нулу. Таква класификација је, дакле, на негативне бројеве, нулу и позитивне бројеве.

Скуп рационалних бројева може се дефинисати као скуп на којем су дефинисане операције сабирања и множења, које имају својства 1–12. Фактички, својства 1–12 дефинишу скуп рационалних бројева.

Уопште, један од начина увођења рационалних бројева у математици састоји се у прихватању дефиниције поља рационалних бројева као таквог минималног поља **Q** које садржи прстен **Z** целих бројева, тј. скупа који има следећа својства: 1) **Q** садржи **Z**; 2) **Q** је поље; 3) сабирање и множење целих бројева поклапају се са истоименим операцијама над тим бројевима у пољу **Q**; 4) поље **Q** не садржи право потпоље које (као прави подскуп) задржи **Z**. Елементи поља **Q** зову се рационални бројеви. Најзад, у оваквом приступу потребно је доказати постојање таквог поља и његову јединственост.

Прилог 2.

Наводимо избор вежбања за ученике из група А и Б (вежбања за ученике групе Б означена су звездицом).

Вежбања

1. Наведите примере: а) природних бројева; б) целих бројева; в) рационалних бројева. Које бројеве називамо рационалним?

2. Да ли је једначина $a+x=b$, где су a и b дати бројеви, а x непозната, решива у скупу: а) природних бројева; б) целих бројева; в) рационалних бројева.

3. Да ли је једначина $ax=b$, где су a и b дати бројеви ($a\neq 0$), а x непозната, решива у скупу: а) природних бројева; б) целих бројева; в) рационалних бројева.

4. Представите у облику децималног разломка: а) $\dfrac{17}{20}$; б) $-\dfrac{8}{25}$; в) $\dfrac{26}{11}$; г) $5\dfrac{9}{20}$.

5. Представите у облику обичних разломака: а) 0,(3); б) 0,2(5); в) −7,(36); г) 7,2(25).

6. Израчунати вредност израза:

а) $0{,}25+0{,}75:(0{,}8\cdot 2{,}25-2{,}05)$;

б) $0{,}(3)+\dfrac{1}{3}$;

в) $(2{,}(1)+3{,}(12)):0{,}5$;

г) $13{,}7\cdot 0{,}1+\left(6\dfrac{22}{45}\cdot 0{,}5-1\dfrac{61}{72}\cdot 2\right)+19{,}89:\left(4{,}75+\dfrac{23}{80}:2{,}3\right)$;

д) $\left(5\dfrac{17}{30}-1\dfrac{41}{96}\cdot 2\right):3\dfrac{7}{8}+0{,}4\left(15{,}25:\dfrac{1}{2}-988:32{,}5\right)+4{,}15\cdot 0{,}4$.

7. Које су операције дефинисане на скупу: а) природних бројева; б) целих бројева; в) рационалних бројева.

8*. Формулишите својства операција у скупу рационалних бројева која су вам позната.

9*. Покажите да између бројева $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{4}{5}$ постоје рационални бројеви. Наведите три таква броја.

10*. Изведите формулу за квадрат разлике два броја и наведите која су основна својства сабирања и множења притом била коришћена.

11*. Изведите правило претварања перидоичног децималног разломка у обичан на примеру следећих разломака: а) $0,(abc)$; б) $0,k(ab)$.

12*. Докажите да је збир међусобно реципрочних позитивних бројева (различитих од јединице) већи од 2: $a+\dfrac{1}{a}>2$ ако је $a>0$, $a\neq 1$.

13. Докажите неједнакости:

а) $\dfrac{1}{a} + 4a \geqslant 4$, $a > 0$;

б) $4a + \dfrac{25}{a} \geqslant 20$, $a > 0$;

в) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, $a > 0$, $b > 0$;

г) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(a + b + c)$ за произвољне a, b, c.

14*. Докажите неједнакости:

а) $\dfrac{2a}{1+a^2} \leqslant 1$ за свако a;

б) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$, $a > 0$, $b > 0$;

в) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ за произвољне a, b, c.

15. Докажите да је обим произвољног троугла већи од збира његових тежишних линија, али мањи од њиховог двоструког збира.

16. Докажите да је $\dfrac{2h_c}{5} < r < \dfrac{h_c}{2}$, где је r полупречник круга уписаног у правоугли троугао, а h_c висина која одговара његовој хипотенузи.

17*. Докажите: а) ако је $a > b$, онда је $a^2 > b^2$ за $a > 0$ и $b > 0$; б) ако је $a > b$, онда је $a^2 < b^2$ за $a < 0$ и $b < 0$.

18*. Пароброд је пловио од луке A до луке B низводно, а затим се вратио у луку A узводно. Упоредите време које је пароброд провео на читавом путу с временом које би он потрошио на исти толики пут у мирној води (при истој сопственој брзини брода).

19*. Из места A кренула су ка месту B истовремено два пешака. Први од њих је прву половину времена изао брзином a km/h, а другу брзином b km/h; други је пешак ишао прву половину пута брзином a km/h, а другу брзином b km/h. Који је од пешака први стигао у место B?

20. Решите неједначине:

а) $5x + 8 < 12 - 7x$;

б) $\dfrac{5x-8}{2x+4} < 1$;

в) $(x+2)(x-5) < 3(x+2)$;

г) $\dfrac{2x+3}{x-6} \geqslant 0$;

д) $\dfrac{4x-5}{2x-1} < 1$;

ђ) $x^2 \geqslant 4x$;

е) $x^2 + 9 > 6x$;

ж) $x^2 - 2x < 3$.

21*. Решите неједначине:

а) $|3x| < 1$;

б) $|4 - 8x| > 1$

в) $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| > 3$;

г) $|x^2 + x - 6| \leqslant 5$.

22*. Колика треба да буде температура $12\,\ell$ литара воде да бисмо, мешајући је са $10\,\ell$ воде температуре 25°, добили воду температуре не мање од 40° и не веће од 50°?

Г. Д. Глејзер, Руска академија образовања