Златка Павличић

ПИТАГОРИНИ БРОЈЕВИ (ТРОЈКЕ)

Циљ овог излагања је да охрабри наставнике математике у основним школама да састављају задатке (из области примене Питагорине теореме) са „лепим“ решењима.

Питагорине тројке бројева

Свака тројка целих позитивних бројева a, b и c која задовољава једначину $a^2+b^2=c^2$ зове се *Питагорина тројка бројева*[1]. Јасно је да они представљају дужине странице правоуглог троугла. Такав троугао ћемо означити са (a,b,c) где ће број c означавати хипотенузу.

Прво се поставља питање егзистенције: да ли постоје такви бројеви? Одговор је потврдан, сазнањем познатог „египатског“ троугла $(3,4,5)$. Заиста: $3^2+4^2=5^2$. Ако ове бројеве множимо било којим другим целим бројем $m>0$, добијамо нови Питагорин троугао, тј. (ma,mb,mc), јер

$$(ma)^2+(mb)^2=m^2(a^2+b^2)=m^2c^2=(mc)^2.$$

Геометријска чињеница је да су сви троуглови добијени на овај начин слични. Међу њима један је свакако најмањи. Он се зове *основни* (*примитивни*) троугао, а сви остали су *изведени.* Питагорини бројеви који одговарају најмањем Питагорином троуглу зову се *основни Питагорини бројеви.* Очигледно никоја два основна Питагорина троугла нису слична.

Нас интересују само основни Питагорини троуглови (бројеви), а помоћу њих можемо пронаћи све остале.

Разматрамо особине основних Питагориних бројева (a,b,c).

1. Три броја у основној тројци (a,b,c) су узајамно прости, јер ако нису, тада они нису најмањи, па не представљају основну тројку.
2. Свака два броја (у пару) у основној тројци (a,b,c) су узајамно прости, тј. немају заједнички делилац. Ако претпоставимо супротно, нпр. $a=a_1d$ и $b=b_1d$, (a_1, b_1 – природни бројеви), из једнакости $a^2+b^2=c^2$, следи:

$$a_1^2d^2+b_1^2d^2=c^2,\qquad (a_1^2+b_1^2)d^2=c^2,\qquad a_1^2+b_1^2=(c/d)^2.$$

[1] Питагорини троуглови (бројеви) били су познати још у време старог Вавилона, Египта и Грчке. Претпоставља се да су Питагора и његови ученици пронашли начин за одређивање тројке Питагориних бројева по формулама $x=2n+1$, $y=2n(n+1)$, $z=2n^2+2n+1$.

Како c/d треба да буде цео број, следи да $d \mid c$, па a, b и c имају заједнички делилац, тј. не чине основну тројку. Значи, $(a,b)=1$. Слично се доказује да је $(a,c)=1$ и $(b,c)=1$.

3. Међу бројевима a, b, c не могу бити истовремено два парна броја, јер онда имају заједнички делилац, па нису узајамно прости. Они не могу бити ни сва три непарна истовремено. Ако претпоставимо да су непарни, тј. $a=2k+1$, $b=2p+1$, $c=2r+1$ ($k,p,r \in \mathbf{N}$), онда из једнакости $a^2+b^2=c^2$ следи:

$$\begin{aligned}(2k+1)^2+(2p+1)^2&=(2r+1)^2,\\ 4(k^2+k+p^2+p)+1&=4(r^2+r).\end{aligned}$$

Ова једнакост је немогућа јер је лева страна непарна, а десна страна је парна.

Из свега овога следи да за три броја у основној Питагориној тројци важи: *један број је паран, а друга два су непарна.* Доказаћемо да број c (хипотенуза), не може бити паран број.

Нека је c паран број тј. $c=2r$, онда морају a и b да буду непарни, $a=2k+1$, $b=2p+1$, па једначина гласи:

$$\begin{aligned}(2k+1)^2+(2p+1)^2&=(2r)^2,\\ 2(k^2+k+p^2+p)+1&=2r^2.\end{aligned}$$

Лева страна је непаран, а десна је паран број, што значи да претпоставка није тачна. Значи:

1) c мора бити непаран број,

2) један од бројева a и b је паран, а други непаран.

Налажење формула за одређивање основних Питагориних тројки

У општем случају можемо узети да је у основној Питагориној тројци (x,y,z), x непаран, а y паран број (z је увек непаран). Тражимо целе позитивне бројеве x,y,z који су у паровима узајамно прости и задовољавају једнакост $x^2+y^2=z^2$, тј. $y^2=z^2-x^2=(z-x)(z+x)$. Како су збир и разлика два непарна броја парни бројеви, следи да су $z-x$ и $z+x$ парни бројеви и да је њихов највећи заједнички делилац број 2, тј. бројеви $(z-x)/2$ и $(z+x)/2$ су узајамно прости. Ако претпоставимо да нису, онда постоје $t,k,p \in \mathbf{N}$ тако да важи $\dfrac{z-x}{2}=tk$ и $\dfrac{z+x}{2}=tp$, одакле следи да је $z=t(k+p)$ и $x=t(p-k)$. Из ове једнакости следи да z и x имају заједнички делилац t, што је у противуречности са $(z,x)=1$. Тада је $\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=\dfrac{z+x}{2}\cdot\dfrac{z-x}{2}$, где су $\dfrac{y}{2}$, $\dfrac{z+x}{2}$, $\dfrac{z-x}{2} \in \mathbf{N}$, јер су y, $z-x$ и $z+x$ парни. Бројеви $\dfrac{z+x}{2}$ и $\dfrac{z-x}{2}$ су узајамно прости, а њихов производ је тачан квадрат. Наиме, ако је производ два узајамно проста броја тачан квадрат, онда су и сами бројеви тачни квадрати.

Нека је $(m,n)=1$ и $mn=k^2$ $(k\in\mathbf{N})$ и нека је $k=k_1k_2\cdots k_p$ канонска факторизација броја k. Тада је $mn=k_1^2k_2^2\cdots k_p^2$, где k_i^2 дели десну страну, па k_i^2 дели леву страну, тј. $k_i^2 \mid mn$, али како m и n немају заједнички делилац, онда сваки од k_i^2 дели или m, или n. Заиста, m и n се разлажу на чиниоце који се садрже у k_1^2, k_2^2, ... , k_p^2, тј. чиниоце који су потпуни квадрати. Значи, m и n су потпуни квардати.

Због чињенице да су $\dfrac{z+x}{2}$ и $\dfrac{z-x}{2}$ квадрати природних бројева можемо да уведемо замену $\dfrac{z+x}{2}=u^2$ и $\dfrac{z-x}{2}=v^2$ $(u,v\in\mathbf{N}$ и $u>v)$. Одатле је $z=u^2+v^2$, $x=u^2-v^2$ и $y=2uv$.

Бројеви u и v су узајамно прости, јер ако нису, онда ће и бројеви $\dfrac{z+x}{2}$ и $\dfrac{z-x}{2}$ имати заједнички делилац, што је немогуће. Бројеви u и v нису истовремено парни или непарни, јер због $x=u^2-v^2=(u-v)(u+v)$, број x биће паран, што је у контрадикцији са претпоставком да је x непаран. Следи да је један од бројева u и v паран, а други непаран.

Добијени резултат можемо изразити преко следеће теореме.

Теорема. *Све основне тројке Питагориних бројева, у случају да је y паран број, одређују се по формулама*

$$x=u^2-v^2,\quad y=2uv,\quad z=u^2+v^2, \tag{A}$$

где су u и v узајамно прости бројеви, један је паран, а други непаран и $u>v>0$.

Други начин за одређивање Питагорине тројке можемо добити ако једначину $x^2+y^2=z^2$ напишемо у облику $x^2=z^2-y^2$, $x^2=(z-y)(z+y)$. Како је z непаран број, а y паран, следи да су бројеви $z-y$ и $z+y$ непарни. Истовремено, они су узајамно прости. Њихов производ је потпун квадрат, па су и они потпуни квадрати.

Ако претпоставимо да је $z+y=p$ и $z-y=q$, $(p>q,\ p,q\in\mathbf{N})$, добијамо да је

$$x=pq,\quad y=(p^2-q^2)/2,\quad z=(p^2+q^2)/2. \tag{B}$$

Лако се утврђује да су p и q два непарна и узајамно проста броја. Може се доказати да су формуле (B) потребан и довољан услов да би (x,y,z) била основна Питагорина тројка. Другим речима, формуле (B) са додатним условима за p и q, дају све основне тројке Питагориних бројева.

Формуле (A) и (B) су еквивалентне, јер ако p и q у формулама (B) заменимо са: $p=u+v$, $q=u-v$ $(u>v)$, добијамо:

$$x=(u+v)(u-v)=u^2-v^2,\quad y=\frac{(u+v)^2-(u-v)^2}{2}=2uv,$$
$$z=\frac{(u+v)^2+(u-v)^2}{2}=u^2+v^2,$$

што значи да добијамо формуле (A). Обратно, ако у (A) заменимо u и v са $u = (p+q)/2$, $v = (p-q)/2$, добијамо формуле (B). Значи, све основне тројке Питагориних бројева одређују се по формулама (A) или (B).

У следећој табели 1, дате су 22 основне тројке Питагориних бројева одређених помоћу формула (A), а у табели 2 приказани су исти бројеви одређени помоћу формула (B). Види се да су то исте тројке, само на различитим местима.

u	v	x	y	z
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113
9	2	77	36	85
9	4	65	72	97
9	8	17	144	145
10	1	99	20	101
10	3	91	60	109
10	7	51	140	149
10	9	19	180	181

Табела 1

p	q	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65
11	1	11	60	61
11	3	33	56	65
11	5	55	48	73
11	7	77	36	85
11	9	99	20	101
13	1	13	84	85
13	3	39	80	89
13	5	65	72	97
13	7	91	60	109
13	9	117	44	125
13	11	143	24	145
15	1	15	112	113
15	7	105	88	137

Табела 2

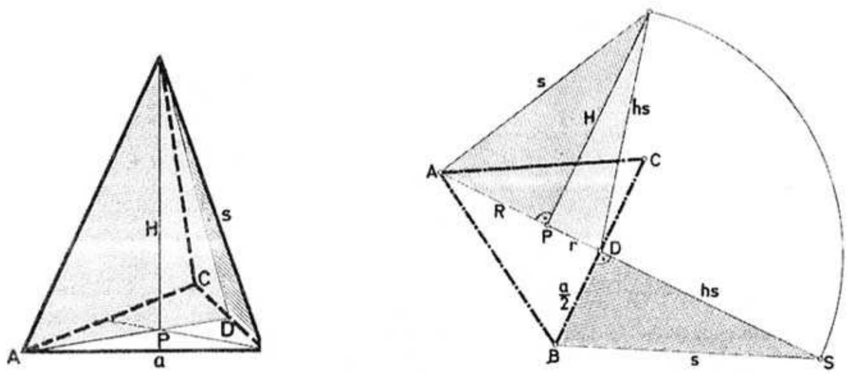
Из табела се јасно може закључити да важи:

- дужина једне катете је дељива са 4, тј. 4 дели y;
- збир $y+z$ је увек тачан квадрат, јер је $y = 2uv$, а $z = u^2+v^2$, па следи $y+z=(u+v)^2$;
- у сваком основном Питагорином троуглу дужина бар једне катете је увек дељива са 3;
- у сваком основном Питагорином троуглу дужина бар једне странице је увек дељива са 5.

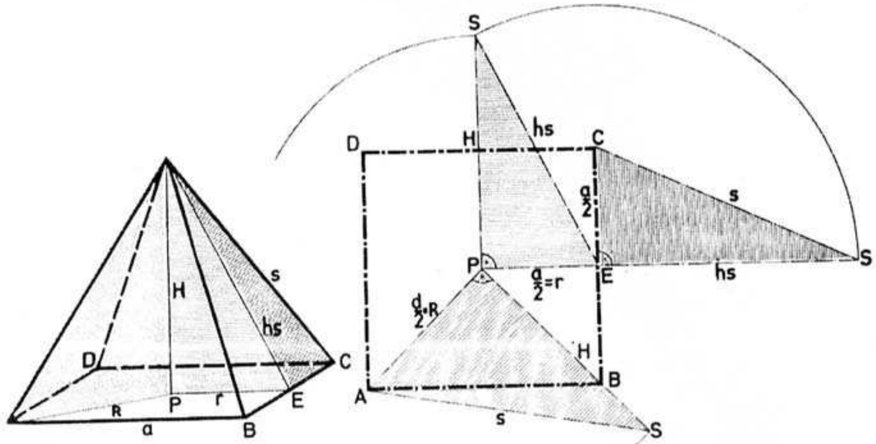
Примена Питагориних тројки на карактеристичне троуглове код неких геометријских тела

Једна од честих примена Питагорине теореме у школској пракси је на решавање задатака у вези са геометријским телима, посебно правилним пирамидама.

Том приликом се користе карактеристични правоугли троуглови, од којих смо неке приказали на наредним сликама. Погодно је у припреми одговарајућих задатака да се искористе претходно наведене табеле Питагориних тројки, како би се смањила потреба за дугачким рачуном, што скреће пажњу са геометријске суштине проблема.



Карактеристични троуглови правилне тростране пирамиде



Карактеристични троуглови правилне четворостране пирамиде

З. Павличић, Техничка школа „Никола Тесла“, Лепосавић
E-mail: pavlicicz@gmail.com