мр Ђоко Г. Марковић

НЕКИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПРИМЈЕРИ ПРИМЈЕНЕ ГЕОМЕТРИЈСКОГ ПОЛИФОРМИЗМА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

Дидактички феномен геометријског полиформизма, по ономе што сам успио током тридесетогодишњег бављења наставом математике средње школе видјети у математичко-методичкој литератури се веома ријетко среће као нека дидактичка посебност, а ако се понегдје примјењује, то је обично интуитивно, сингуларно или стихијски у настави математике осмогодишње и средње школе.

Суштина овога значајног дидактичког феномена састоји се у перманентном инсистирању на интегралном сагледавању разноврсних геометријских приступа разумјевања и поимања проучаваних наставних појмова. Ово у пракси изискује од наставника одлично познавање и вјештину примјењивања најразноврснијих стручно-дидактичко-методичких могућности, а индукује интензивну мисаону активност ученика изражену квалитетним самопрегалачким радом и већом мотивацијом.

Ефикасност примјене геометријског полиформизма заснива се на вишеструкој примјени принципа очигледности интерпретираног у виду иконичких тумачења, као и евидентној психолошкој чињеници да промјене и разноврсност у раду освјежавају наставу, а монотонија углавном индукује слабљење интересовања и појаву пасивности и досаде.

У I разреду гимназије математичког смјера и у оквиру предмета геометрија I разреда математичке гимназије доказује се потребан и довољан услов Птолемејеве теореме. Њеном примјеном започећу разноврсна геометријска доказивања адиционих теорема.

Постоји више доказа адиционих теорема за тригонометријске функције збира и разлике два угла. Један од често примењиваних доказа који експлоатишу средњошколски уџбеници састоји се у томе да се на тригонометријском кругу конструишу пројекције кракова на координантне осе, и ове пројекције сабирају на разне начине. Овдје ћу описати шест мање познатих доказа и четири која нијесам сретао у математичко-методичкој литератури.

1) Примјеном Птолемејеве теореме може се извести теорема: ако су α и β такви углови да је $0 < \alpha + \beta < \pi$, онда је $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

У циљу доказа у равни $\mathbf{R}^2$ уочимо произвољни круг $K(0,r)$ у коме је уписан четвороугао $ABCD$ (слика 1) тако да је AC пречник. Дакле, $AC = 2r$, $\angle ABC = 90^\circ = \angle CDA$, па је

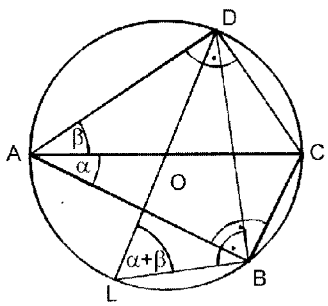
$$\begin{aligned} AB &= AC\cos\alpha = 2r\cos\alpha \qquad & BC &= AC\sin\alpha = 2r\sin\alpha \\ CD &= AC\sin\beta = 2r\sin\beta \qquad & AD &= AC\cos\beta = 2r\cos\beta, \end{aligned}$$

где је $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CAD$.

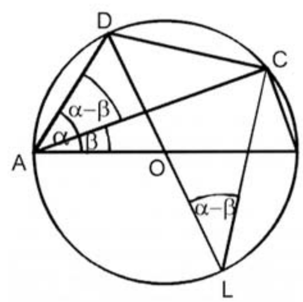
С друге стране, око троугла ABD је описана кружница пречника $2r$, па како је у правоуглом $\triangle DLB$, $\angle DLB = \angle DAB$ као периферијски над истим луком (тетивом) DB, то је $BD = 2r\sin(\alpha+\beta)$. Како је четвороугао $ABCD$ тетиван, то из Птолемејеве теореме слиједи да је $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot AD$, тј.

$$2r\cdot 2r\sin(\alpha+\beta) = 2r\cos\alpha\cdot 2r\sin\beta + 2r\sin\alpha\cdot 2r\cos\beta,$$

одакле је $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.



Сл. 1



Сл. 2

2) Интересантно је видјети како се на сличан (аналоган) начин претходном доказује адициона теорема:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

Нека је четвороугао $ABCD$ тетиван и $AB = 2r$ (слика 2). $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ – периферијски над пречником. $\angle DLC = \angle DAC = \alpha-\beta$ – углови над тетивом DC. Лако је уочити да је:

$$\begin{aligned} BC &= AB\sin\beta = 2r\sin\beta \qquad & AC &= AB\cos\beta = 2r\cos\beta \\ AD &= AB\cos\alpha = 2r\cos\alpha \qquad & BD &= AB\sin\alpha = 2r\sin\alpha \\ \alpha = \angle BAD,&\quad \beta = \angle BAC, \qquad & CD &= LD\sin(\alpha-\beta) = 2r\sin(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Пошто је четвороугао $ABCD$ тетиван, то из Птолемејеве теореме слиједи редом да је: $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot AD$, $2r\cos\beta\cdot 2r\sin\alpha = 2r\cdot 2r\sin(\alpha-\beta) + 2r\sin\beta\cdot 2r\cos\alpha$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$.

Ове методичке приче у доказима 1) и 2) могли бисмо поједноставити ако бисмо узели за $2r = 1$, тј. ако би кружница посматрања била јединичног пречника.

Адиционе теореме могуће је доказати векторски помоћу скаларног производа вектора. Ево неких од тих доказа из методичке праксе.

3) Ако су α и β два угла таква да $0 < \alpha + \beta < \pi$, онда је $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

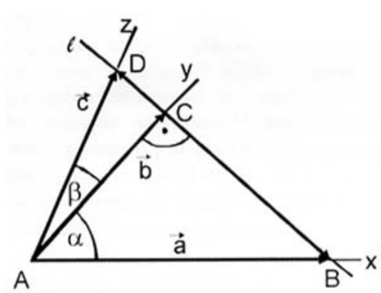
Нека су α и β сусједни углови са тјеменом A и крацима Ax, Ay и Az (слика 3). Узмимо тачку $B \in Ax$. Конструишимо из B нормалу Bl на полуправу Ay. Тада је $Ay \cap Bl = \{C\}$, $Az \cap Bl = \{D\}$ и $AC \perp BD$. Нека је: $|\overrightarrow{AB}| = \vec{a}$,$|\overrightarrow{AC}| = \vec{b}$, $|\overrightarrow{AD}| = \vec{c}$, тј. $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$. Из троугла CDA слиједи $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \overrightarrow{CD}$ и $b = c\cos\beta$ и $CD = c\sin\beta$. Из троугла BCA слиједи $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{b} + \overrightarrow{CB}$, $b = a\cos\alpha$ и $CB = a\sin\alpha$. Из дефиниције скаларног производа слиједи да је

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = ac\cos(\alpha+\beta). \tag{1}$$

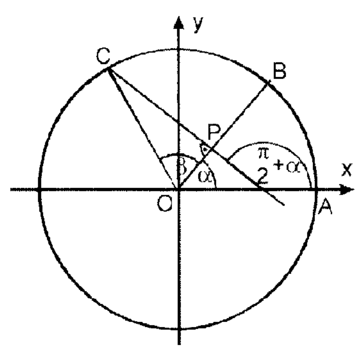
Такође је $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{b}^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{CD} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = b \cdot b + 0 + 0 + CB \cdot CD\cos\pi = b \cdot b - CB \cdot CD = a\cos\alpha \cdot c\cos\beta - a\sin\alpha \cdot c\sin\beta = ac(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$, па је

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = ac(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta). \tag{2}$$

Из (1) и (2) слиједи полазно тврђење.



Сл. 3



Сл. 4

4) Ако су α и β произвољни углови, могуће је доказати тврђење $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ примјеном скаларног производа вектора и на сљедећи начин. Нека су α и β сусједни углови у тригонометријском кругу ($OA = OB = OC = 1$). Конструишимо нормалу из C на OB (слика 4). Нека је подножје те нормале тачка P. Тада је: $OP = \cos\beta$, $PC = \sin\beta$. Користећи се дефиницијом скаларног производа вектора лако је уочити да је

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OA \cdot OC\cos(\alpha+\beta). \tag{3}$$

Како је $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$, то је $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PC} = OA \cdot OP\cos\alpha + OA \cdot PC\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \tag{4}$$

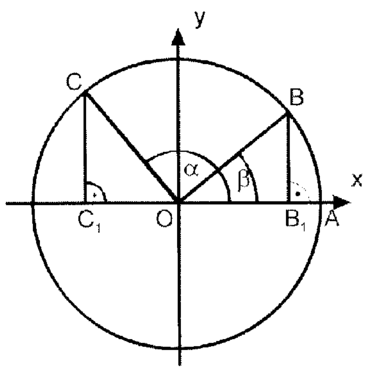
Из (3) и (4) слиједи полазно тврђење.

5) Ако су α и β произвољни углови, онда је $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

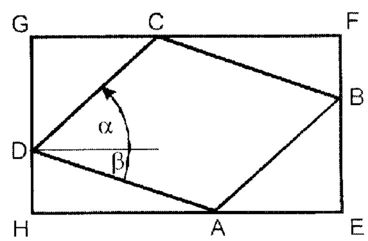
Доказ. Нека су углови $\alpha = \angle AOC$ и $\beta = \angle AOB$ приказани у тригонометријском кругу као на слици 5. Вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ су јединични вектори и њихов координантни облик је познат, тј. $\overrightarrow{OA} = (\cos 0, \sin 0)$, $\overrightarrow{OB} = (\cos\beta, \sin\beta)$ и $\overrightarrow{OC} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Угао између вектора $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ је $\alpha-\beta$, па је

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{OB}|} = (\cos\alpha, \sin\alpha)\cdot(\cos\beta, \sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

чиме је ова теорема доказана.



Сл. 5



Сл. 6

Из ове, као и из претходно доказаних теорема, на једноставан начин могу се извести све остале адиционе теореме.

Ако такав математичар какав је био проф. др Мирко Стојаковић каже да сљедећи доказ адиционе теореме

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \tag{1}$$

није сретао у методичкој литератури онда га са великом сигурношћу можемо сматрати његовим.

6) Посматрамо ромб са ивицом 1, чији један угао има вриједност $\alpha+\beta$. Овај угао може бити и мањи и једнак и већи од правог угла. У доказу то нема значаја. Упишимо тај ромб у правоугаоник тако да једна страница правоугаоника заклапа са сусједним ивицама ромба угао α, односно β. На слици 6 ромб је $ABCD$, правоугаоник $EFGH$, угао α је $\angle BAE$, угао β је $\angle DAH$, а према томе $\alpha+\beta$ је $\angle CDA$. Површина ромба (P), по познатом обрасцу у коме се производ ивица множи још синусом захваћеног угла јесте

$$P = \sin(\alpha+\beta). \tag{2}$$

Ивице правоугаоника су $\sin\alpha + \sin\beta$, $\cos\alpha + \cos\alpha$, па је површина (R) тог правоугаоника производ тих ивица. Дакле,

$$R = (\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha + \cos\beta). \tag{3}$$

Површине троуглова који „опкољавају“ ромб и којих има четири, али су по два једнака, износи укупно S, а види се са слике 6 да важи

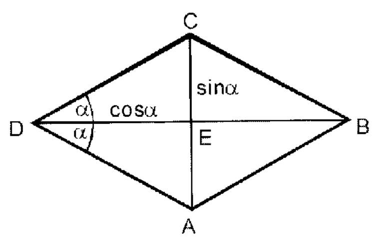
$$S = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta. \tag{4}$$

Пошто се „одбијањем“ троуглова од правоугаоника добија ромб, важи

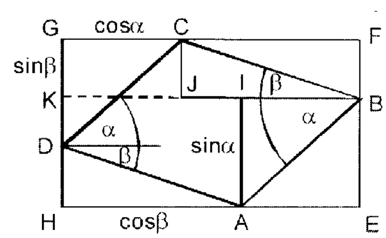
$$P = R - S, \tag{5}$$

па када се овдје унесу вриједности из (2), (3), (4) добија се $\sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha + \cos\beta) - (\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, и то је управо (1), то јест оно што смо хтјели да докажемо.

У специјалном случају, када је $\alpha = \beta$ (слика 7), без описивања правоугаоника око ромба, постаје јасно да је $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Ромб се, наиме, тада састоји од четири троугла, од којих је сваки површине $\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$.



Сл. 7



Сл. 8

Иначе, у општем случају, одузимање четири троугла од укупне површине правоугаоника може се извршити и на друге начине. Тада постаје непотребно измножавање израза у заградама и одузимање у једначини (5).

На слици 8 види се посредно да је површина ромба $\sin(\alpha+\beta)$ једнака збиру $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$. Када се, наиме, од правоугаоника $EFGH$ одузму троуглови ABI, ABE, BCF и BCJ, преостали дио, једнак иначе по површини ромбу $ABCD$, састоји се од два правоугаоника, $CGKJ$ и $AIKH$, чије су странице $\sin\beta$, $\cos\alpha$, односно $\sin\alpha$, $\cos\beta$, што и доказује тврђење (1).

Овај оригинални доказ објављен у струковно-методичком часопису „Математика“ бр. 1, Београд, 1973. Професор Стојаковић завршава сљедећим цитатом: „Не знам како ја могу изгледати свету; али самом себи изгледам као да сам дечак који се игра на обали, забављајући се с времена на време налажењем све глаткијих каменчића или лепших шкољки, док преда мном лежи непознати и пространи океан истине – Исак Њутн, Brewster's Memoirs of Newton.“

Доказ професора, чији сам био студент, на мене је оставио посебан утисак. Пажљивим анализирањем поступка, вођен шаригиновском визијом о љепоти и једноставности цртежа (слике) дошао сам на идеју да га поједноставим. Методом суперпозиције из специјалног случаја извео сам општији доказ теореме.

7) (1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$.

Доказ. Посматрајмо ромб са ивицом 1, чији један угао има вриједност $\alpha+\beta$. Тај угао задовољава неједнакост $0<\alpha+\beta<180^\circ$. Дакле, $\alpha+\beta=\angle ADC=\angle ADE+\angle EDC$, тј. $\angle ADE=\beta$ и $\angle EDC=\alpha$ (слика 9). Конструишимо праве m, p и q које пролазе респективно тачкама B, C и A, при чему је $m\parallel DE$, $p\parallel DE$ и $q\parallel DE$, тј. m је паралелна са DE, а праве p и q нормалне на DE. Лако је показати подударност правоуглих троуглова $\triangle ADF\cong\triangle CBH$ и $\triangle DEC\cong\triangle ABG$ (имају једнаке хипотенузе $DA=BC=CD=AB=1$, $\angle CHB=\angle AFD=\angle DEC=\angle BGA=90^\circ$ по конструкцији и $\angle ADF=\angle CBH=\beta$ и $\angle CDE=\angle ABG=\alpha$ углови са паралелним крацима).

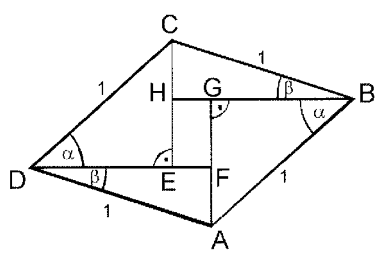
Из конструкције слиједи да је $EFGH$ правоугаоник страница: $EH=EC-HC=\sin\alpha-\sin\beta$ и $EF=DF-DE=\cos\beta-\cos\alpha$, гдје је: $EC=\sin\alpha$, $ED=\cos\alpha$, $DF=\cos\beta$ и $FA=\sin\beta=HC$.

Површина ромба по познатом обрасцу је $P=\sin(\alpha+\beta)$. С друге стране, површина тог ромба се добија као збир површина два пара подударних правоуглих троуглова и наведеног правоугаоника, тј.

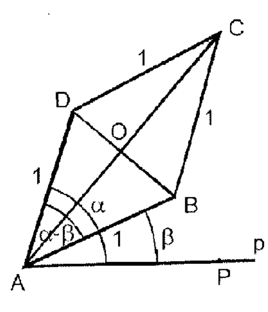
$$\begin{aligned}P&=2\cdot\frac{DF\cdot FA}{2}+2\cdot\frac{DE\cdot EC}{2}+EH\cdot EF=DF\cdot FA+DE\cdot EC+EH\cdot EF\\&=\cos\beta\sin\beta+\cos\alpha\sin\alpha+(\sin\alpha-\sin\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha.\end{aligned}$$

Овим је теорема (1) у потпуности доказана. Очигледно да би сваки од ових седам наведених доказа могао наћи своје мјесто у наставној пракси. По мојем мишљењу докази под 1), 2), 6) и 7) могли би се равноправно радити умјесто доказа постојећих у уџбеницима II разреда средње школе, док би доказе под 3), 4) и 5) могли радити послије наставне јединице „Скаларни производ вектора“ на часовима увјежбавања градива у III разреду средње школе.

С обзиром да се уобичајени поступци у наставној пракси ријетко мијењају, тешко је вјеровати да се у њој могу видјети неке још радикалније иновације.



Сл. 9



Сл. 10

У настави тригонометрије уобичајено је да се прво доказују адиционе теореме, чијом примјеном се касније изводе остале тригонометријске формуле. Ако бисмо неким другачијим поступком могли доказати неку од идентичких трансформација претварања збира или разлике тригонометријских функција у производ тригонометријских функција, могли бисмо тривијално доказати све адиционе и друге тригонометријске формуле. Овај реверзибилни поступак, ономе који се тренутно одвија у наставној пракси, могао би се примјенити ако на неки другачији начин од уобичајеног докажемо нпр. теорему о трансформацији збира косинуса у производ. Коришћењем Стојаковићеве идеје о јединичном ромбу ево једне нове верзије тога доказа у мојој интерпретацији.

8) (1) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, за произвољне углове α и β.

Доказ. Конструишимо ромб $ABCD$ чији је угао $\angle BAD = \alpha - \beta$ са ивицом јединичне дужине на сљедећи начин. Конструишимо произвољну полуправу Ap и тачку $P \in Ap$ и углове $\angle PAB = \beta$ и $\angle PAD = \alpha$ као на слици 10. Користећи се теоремом о пројекцији вектора на осу лако је уочити да је пројекција вектора $\overrightarrow{AC}$ на осу Ap једнака збиру пројекција вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ на ту осу. Дакле, $|\overrightarrow{AC}|\cos\angle PAC = |\overrightarrow{AB}|\cos\beta + |\overrightarrow{BC}|\cos\alpha$. Како је $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$ и $\angle PAC = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, то је

$$|\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\alpha + \cos\beta. \tag{2}$$

Интензитет вектора $\overrightarrow{AC}$ једнак је двострукој вриједности пројекције вектора $\overrightarrow{AB}$ на осу вектора $\overrightarrow{AC}$, тј.

$$|\overrightarrow{AC}| = 2\cdot pr_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = 2|\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAC = 2|\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{3}$$

Јасно је да сам при овом доказивању имао у виду основне чињенице о ромбу да му се дијагонале полове, као и то да су нормалне једна на другу и да су оне уједно и симетрале углова ромба.

Из једнакости (2) и (3) слиједи (1).

Полазећи од релације (1) лако се могу одредити и све остале тригонометријске формуле. Умјесто тог тривијалног доказивања овдје ћу показати како сам уопштавајући доказ теореме 7) којим сам поједноставио доказ професора Стојаковића дошао до два нова доказа те теореме.

9) Доказаћу релацију: (1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

Доказ. Посматрајмо ромб ивице a, чији један угао има вриједност $\alpha+\beta$. Нека тај угао задовољава неједнакост $0^\circ < \alpha+\beta < 180^\circ$. Конструишимо праве m, p и q које пролазе респективно тачкама B, C и A, при чему је $m \parallel DE$, $p \parallel DE$ и $q \parallel DE$, тј. m је паралелна са DE, а праве p и q су нормалне на DE. Лако је показати подударност правоуглих троуглова $\triangle ADF \cong \triangle CBH$ и $\triangle DEC \cong \triangle BGA$. Лако је уочити да је $EFGH$ правоугаоник страница: $EH =$

$EC - HC = a\sin\alpha - a\sin\beta$ и $EF = DF - DE = a\cos\beta - a\cos\alpha$, јер је: $EC = a\sin\alpha$, $ED = a\cos\alpha$, $DF = a\cos\beta$ и $HC = FA = a\sin\beta$. По познатом обрасцу површина ромба је

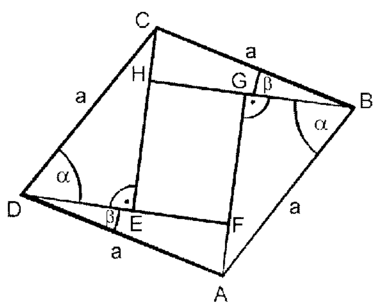
$$P = a^2\sin(\alpha+\beta). \tag{2'}$$

С друге стране, површина тога ромба се добија као збир површина два поменута пара подударних правоуглих троуглова и наведеног правоугаоника, тј. $\triangle DEC \cong \triangle BGA$ и $\triangle DFA \cong \triangle BHC$ и правоугаоника $EFGH$ (слика 11). Дакле,

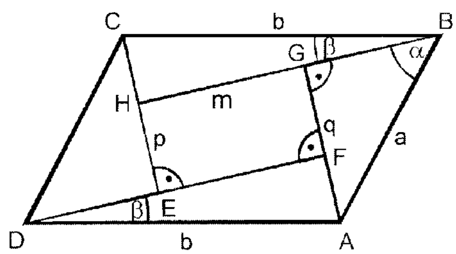
(3')

$$\begin{aligned}P &= 2\cdot\frac{DF\cdot FA}{2} + 2\cdot\frac{DE\cdot EC}{2} + EH\cdot EF = DF\cdot FA + DE\cdot EC + EH\cdot EF\\ &= a\cos\beta\cdot a\sin\beta + a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha + (a\sin\alpha - a\sin\beta)(a\cos\beta - a\cos\alpha)\\ &= a^2\cos\beta\sin\beta + a^2\cos\alpha\sin\alpha + a^2\sin\alpha\cos\beta - a^2\sin\alpha\cos\alpha - a^2\sin\beta\cos\beta+\\ &\quad + a^2\sin\beta\cos\alpha = a^2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha).\end{aligned}$$

Из (2') и (3') слиједи (1).



Сл. 11



Сл. 12

Када сам увидио да се наведена теорема може доказати на претходни начин, поставио сам себи питање: да ли се наведена теорема може доказати тако што бисмо умјесто ромба ивица a користили произвољни паралелограм ивица a и b. Потврдан одговор на то питање проистиче као посљедица уопштавања, тј. генерализација случајева 7) и 9).

10) Доказаћемо на један нови начин адициону теорему (1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

Доказ. Посматрајмо паралелограм ивица a и b, чији један угао има вриједност $\alpha+\beta$. Нека тај угао задовољава неједнакост $0° < \alpha+\beta < 180°$. Конструишимо праве m, p и q које пролазе респективно тачкама B, C и A при чему је $m \parallel DE$, $p \parallel DE$ и $q \parallel DE$, тј. m је паралелна са DE, а праве p и q су нормалне на DE. Лако је показати подударност правоуглих троуглова $\triangle ADF \cong \triangle CHB$ и $\triangle DEC \cong \triangle BGA$. Лако је уочити да је је $EFGH$ правоугаоник страница:

$EH = EC - HC = a\sin\alpha - b\sin\beta$ и $EF = DF - DE = b\cos\beta - a\cos\alpha$, јер је $EC = a\sin\alpha$, $HC = b\sin\beta$, $DF = b\cos\beta$ и $DE = a\cos\alpha$ (слика 12). Користећи познати образац за израчунавање површине паралелограма слиједи

$$P = ab\sin(\alpha+\beta). \tag{$2''$}$$

С друге стране, површина тог паралелограма се добија као збир површина два пара наведених подударних троуглова и правоугаоника $EFGH$, па је:

(3″)

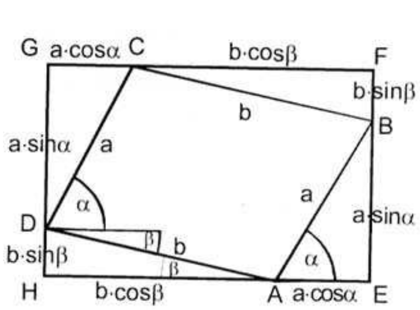
$$\begin{aligned} P &= 2\cdot\frac{DF\cdot FA}{2} + 2\cdot\frac{DE\cdot EC}{2} + EH\cdot EF = DF\cdot FA + DE\cdot EC + EH\cdot EF\\ &= b\cos\beta\cdot b\sin\beta + a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha + (a\sin\alpha - a\sin\beta)(b\cos\beta - a\cos\alpha)\\ &= b^2\sin\beta\cos\beta + a^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin\alpha\cos\beta - a^2\sin\alpha\cos\alpha - b^2\sin\beta\cos\beta +\\ &\quad + ab\sin\beta\cos\alpha = ab(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha). \end{aligned}$$

Из (2″) и (3″) слиједи (1), што је и требало доказати.

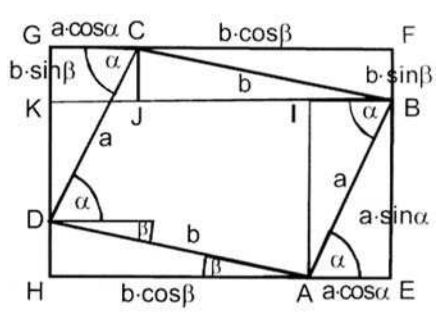
Анализирајући иновирани доказ 10) и доказ 6) проф. др Мирка Стојаковића дошао сам до закључка да се доказ 6) може иновирати на још два општија начина.

11) Посматрајмо паралелограм чије су ивице a и b и један угао има вриједност $\alpha+\beta$. Овај угао може бити мањи и једнак и већи од правог угла. У доказу то нема значаја. Упишимо тај паралелограм у правоугаоник тако, да једна страница правоугаоника заклапа са сусједним ивицама паралелограма угао α, односно β. На слици 13 паралелограм је $ABCD$, правоугаоник $EFGH$, угао α је $\angle BAE$, а угао β је $\angle DAH$, па је $\alpha+\beta = \angle CDA$.

Површина паралелограма (P) по познатом обрасцу у коме се производ ивица множи са синусом захваћеног угла јесте $P = ab\sin(\alpha+\beta)$. Ивице правоугаоника су $b\cos\beta + a\cos\alpha$ и $a\sin\alpha + b\sin\beta$, па је његова површина $R = (b\cos\beta + a\cos\alpha)(a\sin\alpha + b\sin\beta)$. Површина троуглова који опкољавају паралелограм и којих има четири, али су по два једнака, износи S, тј. $S = b^2\sin\beta\cos\beta + a^2\cos\alpha\sin\alpha$, па је $P = R - S$, одакле слиједи $ab\sin(\alpha+\beta) = (b\cos\beta + a\cos\alpha)\times(a\sin\alpha + b\sin\beta) - b^2\sin\beta\cos\beta - a^2\cos\alpha\sin\alpha$, тј. $ab\sin(\alpha+\beta) = ab\sin\alpha\cos\beta + ab\sin\beta\cos\alpha$, па је коначно $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.



Сл. 13



Сл. 14

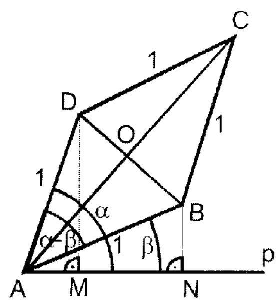
Иначе, у општем случају и овдје одузимање четири троугла од укупне површине правоугаоника као и у случају 6) може се извршити и на друге начине. Тада постаје непотребно множење у заградама слично као у случају 6).

12) Када се од правоугаоника $EFGH$ одузму троуглови ABI, ABE, BFC и BCJ, преостали дио, једнак иначе по површини паралелограму $ABCD$, састоји се од два правоугаоника $CGKJ$ и $AIKH$, чије су странице $a\cos\alpha$, $b\sin\beta$, односно $b\cos\beta$, $a\sin\alpha$, одакле је површина паралелограма $ab\sin(\alpha+\beta)$ једнака збиру површина та два правоугаоника, тј. $ab\sin\alpha\cos\beta + ab\sin\beta\cos\alpha$, одакле непосредно слиједи $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ (слика 14). Овим је доказ професора Стојаковића добио једну иновирану општију верзију.

Бројем 13 означићу наставак те полиформне приче доказом сљедеће теореме.

13) Ако су α и β такви углови да $0 < \alpha+\beta < \pi$ и $\alpha > \beta$, тада је $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$.

Доказ. Користећи се идејом о јединичном ромбу и теоремама о разложивој и допунској једнакости површина полигона лако је доказати ову теорему. Конструишимо један јединични ромб $ABCD$ са углом $\angle BAD = \alpha - \beta$ и конструишимо полуправу Ap као на слици 15. Из тјемена B и D спустимо нормале на полуправу Ap и обиљежимо њихова подножја респективно са N и M. Површину $\triangle ABD$ можемо израчунати на два начина:



Сл. 15

а) $P_{\triangle ABD} = \dfrac{1}{2} P_{ABCD} = \dfrac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$ и

б)

$$P_{\triangle ABD} = P_{\triangle AMD} + P_{MNBD} - P_{\triangle ANB} = \frac{AM\cdot MD}{2} + \frac{(DM+BN)\cdot MN}{2} - \frac{AN\cdot NB}{2} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2} + \frac{(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)}{2} - \frac{\cos\beta\sin\beta}{2} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{2},$$

па из а) и б) сљеди $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$, чиме је доказ окончан.

Литература

1. М. Марјановић, *Методика математике*, први део, Београд, 1996.
2. М. Марјановић, *Методика математике*, други део, Београд, 1996.
3. L. Waltert, *Methodik des mathematischen Unterrichts IV*, Heidelberg, 1955.
4. Р. Арнхајм, *Визуелно мишљење (јединство слике и појма)*, Београд, 1985.
5. G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb, 1966.
6. *Математика*, стручно-методички часопис, бр. 1, Београд, 1973.
7. *Математическое просвещение*, третья серия, Издательство МЦНИО, Москва, 2004.
8. Ђ. Г. Марковић, *Геометријски полиформизам*, Макарије, Подгорица, 2006.