Др Слободанка Јанковић

О БЕРНШТАЈНОВОМ ПРОБАБИЛИСТИЧКОМ ДОКАЗУ ВАЈЕРШТРАСОВЕ ТЕОРЕМЕ И НЕКИМ УОПШТЕЊИМА

Чувена Вајерштрасова теорема [4] тврди да се свака непрекидна функција на затвореном интервалу може равномерно апроксимирати полиномима. За ову теорему постоји више доказа и различитих уопштења. Овде ће бити изложен Бернштајнов [2] пробабилистички доказ те теореме. Такође ће бити дата, са доказом, веома лепа и интересантна Коровкинова теорема [3] о конвергенцији позитивних линеарних оператора, из које се као једноставна последица добија Вајерштрасова теорема. Доказ Коровкинове теореме се изводи по аналогији са Бернштајновим доказом Вајерштрасове теореме. Ова Коровкинова теорема је привукла пажњу многих математичара и дошло је до развоја обимног поглавља у теорији апроксимација [1] базираног на тој теореми. Оно што је овде посебно занимљиво је чињеница, која ће се видети, да веза између анализе и стохастике није једносмерна. Познато је да се стохастика базира на анализи, а овде имамо диван пример да се теорема анализе може изузетно елегантно доказивати уз помоћ стохастике.

Теорема 1 (Вајерштрас). *Нека је f реална непрекидна функција дефинисана на одсечку $[a, b]$. Тада за свако $\epsilon > 0$ постоји такав полином $P(x)$, да важи*

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon,$$

за свако $x \in [a, b]$.

Доказ (Бернштајн). Довољно је доказати теорему за случај када је f дефинисана на одсечку $[0, 1]$. Заиста, линеарном сменом аргумента прелази се са функције f дефинисане на одсечку $[a, b]$ на функцију $g(x) = f(a + x(b - a))$ дефинисану на $[0, 1]$ и обратно.

Нека је f непрекидна функција дефинисана на интервалу $[0, 1]$. Полином

$$B_n(f, p) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \le p \le 1 \tag{1}$$

зове се Бернштајнов полином функције f, а B_n се зове Бернштајнов оператор.

Показаћемо да важи

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0 \le p \le 1} |f(p) - B_n(f, p)| = 0.$$

Означимо са X случајну промењиву са биномном расподелом $B(n;p)$, то јест $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\ldots,n$. Њено очекивање и дисперзија су $EX=np$, $DX=np(1-p)$. Имамо да је $B_n(f,p)=E(f(X/n))$.

Ако са S_n означимо суму $S_n=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$, где случајне промењиве Y_j, $j=0,1,\ldots,n$, имају Бернулијеву расподелу, $P\{Y_j=0\}=1-p$; $P\{Y_j=1\}=p$, тада њихова сума S_n има биномну расподелу $B(n;p)$.

Пошто важи Бернулијев закон великих бројева, имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\epsilon\right\}=0,$$

а пошто је f непрекидна функција, онда ће и $f(S_n/n)$ бити блиско $f(p)$ за довољно велико n.

Функција f је непрекидна на затвореном интервалу $[0,1]$, па је она на њему равномерно непрекидна тј. важи да за свако $\epsilon>0$ постоји $\delta>0$ такво да је $|f(x)-f(y)|\le\epsilon$ за $|x-y|\le\delta$, $x,y\in[0,1]$. Осим тога, функција f је и ограничена, тј. постоји константа M таква да је $|f(x)|\le M$ за $0\le x\le 1$. Користећи те чињенице, добијамо следеће оцене

$$\begin{aligned}
|f(p)-B_n(f,p)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(p)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right| \\
&\le \sum_{\left\{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\delta\right\}}\left|f(p)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{\left\{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|>\delta\right\}}\left|f(p)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \le \\
&\le \epsilon+2MP\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\delta\right\}
\end{aligned}$$

(користимо Чебишевљеву неједнакост)

$$\le \epsilon+2Mp(1-p)n^{-1}\delta^{-2}$$

(користимо да је $p(1-p)\le 1/4$ за $0\le p\le 1$)

$$\le \epsilon+M2^{-1}n^{-1}\delta^{-2}.$$

Дакле, доказано је да

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le p\le 1}|f(p)-B_n(f,p)|=0. \quad \blacksquare$$

Овај доказ даје експлицитно полиноме којима се врши апроксимација непрекидних функција а такође и оцену брзине конвергенције.

Осим Бернштајновог оператора B_n (1), који је конструисан на основу биномне расподеле, у литератури су разматрани и други оператори пробабилистичког типа, конструисани на основу других расподела. Овде ћемо да наведемо неке од тих оператора.

1) *Meyer-König i Zeller*: $R_n\colon C[0,1]\to C[0,1]$,

$$R_n(f)(x) := (1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k}\right)\binom{n+k}{k}x^k,\quad x\in[0,1].$$

2) *Канторович*: $U_n\colon L^1[0,1]\to C[0,1]$,

$$U_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n}(n+1)\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad x\in[0,1].$$

3) *Bernstein-Durrmeyer*: $D_n\colon L^1[0,1]\to C[0,1]$,

$$D_n(f)(x) := (n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}f(t)dt\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\ x\in[0,1].$$

4) *Szász-Mirakjan*: $M_n\colon C[0,\infty)\to C[0,\infty)$,

$$M_n(f)(x) := \exp(-nx)\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^kx^k}{k!},\quad x\ge 0.$$

5) *Баскаков*: $A_n\colon C[0,\infty)\to C[0,\infty)$,

$$\begin{aligned}A_n(f)(x) &:= (1+x)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{-n}{k}(-x)^k(1+x)^{-n-k},\quad x\ge 0.\end{aligned}$$

Постоји опширна литература у којој се доказује апроксимационо својство горњих оператора, аналогно апроксимационом својству Бернштајновог оператора. Користећи следећу Коровкинову теорему, која се односи на позитивне линеарне операторе, може се доказати апроксимационо својство тих оператора, укључујући и Бернштајнов.

Теорема 2 (Коровкин). *Нека је $A_n\colon C[a,b]\to C[a,b]$ низ линеарних позитивних оператора ($A_nx\ge 0$ за $x\ge 0$). Ако важи $A_n(e_i)\to e_i$, $n\to\infty$, за свако $i=0,1,2$, где је $e_i(t)=t^i$, тада је $\lim_{n\to\infty}A_n(x)=x$ за свако $x\in C[a,b]$. (Овде се подразумева конвергенција у смислу метрике простора $C[a,b]$, тј. униформна конвергенција функција.)*

Доказ. Због униформне непрекидности за свако $x\in C[a,b]$ и свако $\epsilon>0$ постоји такво $\delta>0$, да је $|x(t)-x(\tau)|<\epsilon$ за $t,\tau\in[a,b]$ који задовољавају неједнакост $|t-\tau|<\delta$.

Такође важи да је $|x(t)-x(\tau)| \leq 2m$ за свако $t, \tau \in [a,b]$, где је $m = \|x\| = \sup_{a\leq t\leq b}|x(t)|$. Када је $|t-\tau| > \delta$, имамо

$$|x(t)-x(\tau)| \leq 2m \leq 2m|t-\tau|^2\delta^{-2}.$$

Дакле, за свако $t, \tau \in [a,b]$ важи

$$|x(t)-x(\tau)| \leq \epsilon + 2m|t-\tau|^2\delta^{-2} = \epsilon + 2m\delta^{-2}(t^2 - 2t\tau + \tau^2).$$

Фиксирајмо τ; тада добијамо

$$|x - x(\tau)e_0| \leq \epsilon e_0 + 2m\delta^{-2}(e_2 - 2e_1\tau + \tau^2 e_0).$$

Коришћењем линеарности, добијамо оцену:

$$\begin{aligned} |A_n x - x(\tau)A_n e_0| &= |A_n(x - x(\tau)e_0)| \leq A_n|x - x(\tau)e_0| \\ &\leq \epsilon A_n e_0 + 2m\delta^{-2}(A_n e_2 - 2\tau A_n e_1 + \tau^2 A_n e_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Претходно важи за свако t, па и за $t = \tau$. Зато имамо:

$$\begin{aligned} &|A_n x(\tau) - x(\tau)A_n e_0(\tau)| \leq \\ &\quad \leq \epsilon A_n e_0(\tau) + 2m\delta^{-2}(A_n e_2(\tau) - 2e_1(\tau)A_n e_1(\tau) + e_2(\tau)A_n e_0(\tau)). \end{aligned} \tag{3}$$

Супремум леве стране у формули (3) је:

$$\sup_{a\leq\tau\leq b}|A_n x(\tau) - x(\tau)A_n e_0(\tau)| = \sup_{a\leq\tau\leq b}|(A_n x - xA_n e_0)(\tau)| = \|A_n x - xA_n e_0\|.$$

Десну страну неједнакости (3) можемо мајорирати на следећи начин:

$$\begin{aligned} &\epsilon A_n e_0(\tau) + 2m\delta^{-2}(A_n e_2(\tau) - 2e_1(\tau)A_n e_1(\tau) + e_2(\tau)A_n e_0(\tau)) = \\ &\quad = \epsilon A_n e_0(\tau) + 2m\delta^{-2}(A_n e_2 - 2e_1 A_n e_1 + e_2 A_n e_0)(\tau) \leq \\ &\quad\quad \leq \epsilon\|A_n e_0\| + 2m\delta^{-2}\|A_n e_2 - 2e_1 A_n e_1 + e_2 A_n e_0)\|. \end{aligned}$$

Следи да је

$$\|A_n x - xA_n e_0\| \leq \epsilon\|A_n e_0\| + 2m\delta^{-2}\|A_n e_2 - 2e_1 A_n e_1 + e_2 A_n e_0\|.$$

Дакле имамо да је $\limsup \|A_n x - xA_n e_0\| \leq \epsilon, \forall\epsilon > 0$. Одатле следи $A_n x - xA_n e_0 \to 0$. Пошто према услову теореме $xA_n e_0 \to x$, добијамо да $A_n x \to x$, $n \to \infty$, што је и требало доказати.

Још само мали коментар: у формули (2) је коришћена следећа неједнакост $|A_n(x)| \leq A_n|x|$ која се може доказати на следећи начин.

$$\begin{aligned} &|A_n(x)| = |A_n(x^+ - x^-)| = |A_n x^+ - A_n x^-| \leq \\ &\quad \leq |A_n x^+| + |A_n x^-| = A_n x^+ + A_n x^- = A_n(x^+ + x^-) = A_n|x|, \end{aligned}$$

где је $x^+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $x^- = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$; $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$. Тиме је доказ завршен. ∎

Из Коровкинове теореме следи Вајерштрасова теорема. Покажимо да Бернштајнови оператори

$$B_n x(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} x\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

задовољавају услове Коровкинове теореме. Они су очигледно линеарни и позитивни. Покажимо још да важи $B_n(e_i) \to e_i$, $n \to \infty$, униформно на $[a,b]$ за свако $i = 0, 1, 2$, где је $e_i(t) = t^i$. Имамо:

$$B_n e_0(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} = 1;$$

$$B_n e_1(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = a + \frac{b-a}{n} n \frac{t-a}{b-a} = t;$$

$$B_n e_2(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)^2 =$$

$$= a^2 + 2a\frac{b-a}{n} n \frac{t-a}{b-a} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \left(n\frac{t-a}{b-a} \cdot \frac{b-t}{b-a} + n^2 \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^2\right) =$$

$$= t^2 + \frac{(t-a)(b-t)}{n} \to t^2.$$

Литература

1. Altomare, F., Campiti, M., *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications,* de Gruyter Studies in Mathematics, 1994.
2. Bernstein, S., *Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probabilites*, Commun. Soc. Math. Kharkov (2), 13 (1912-13), 1–2.
3. Коровкин, П., *О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций*, Доклады Акад. Наук СССР 90 (1953), 961–964.
4. Weierstrass, K., *Über die analytische Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen einer reelen Veranderlichen*, Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin (1885), 633–639, 789–805.

С. Јанковић, Математички институт САНУ, Београд, Кнеза Михаила 36