Др Радослав Милошевић

ТРАДИЦИОНАЛНО И САВРЕМЕНО У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНИМ И СРЕДЊИМ ШКОЛАМА НА ЈЕДНОМ ПРИМЈЕРУ ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

Настава математике данас, а поготово у будућности незамислива је без информатичке подршке. Још се многима чини да ће информатика у други план „потиснути" многе природне науке па и математику, а нарочито геометрију. Међутим, такве бојазни не би требало бити.

Од много програмских пакета за наставу математике чини нам се да је најприкладнији пакет `MATHEMATICA`. Он се у настави математике може третирати двоструко – као наставна метода и као наставно средство.

Вођени смо идејом да је добро ученике што више везати проучавању проблема који нису обавезни у редовној настави; зато ћемо овдје предложити проучавање Дезаргове теореме и то: графички, аналитички и информатички. Ова тема је погодна за мало истраживање већ у VII разреду основне школе, а за средњу школу смо је поопштили користећи методу афине геометрије.

Оба приказа – посебни (за VII разред) и општи (за средњу школу) илустровали смо информатички у програму `MATHEMATICA`. Предност овог комбинованог метода рада је у томе што повезује традиционално и савремено у настави математике као што је овај примјер илустрован на Дезарговој теореми.

Дезаргова теорема

Погодна тема за мало истраживање већ у VII разреду основне школе је провјера Дезаргове[1] теореме, која гласи:

Ако су троуглови $\triangle ACE$ и $\triangle A_1C_1E_1$ у равни M одабрани тако да су им праве које пролазе кроз одговарајуће врхове копунктуалне (праве AA_1, EE_1 и CC_1 сијеку се у истој тачки), тада су пресјеци одговарајућих страница колинеарни, тј. пресјеци правих AC и A_1C_1, AE и A_1E_1 те CE и C_1E_1 припадају истој правој.

[1] Жерар Дезарг (Gerard Desargues) је француски математичар (1593–1662). Између осталог био је официр и инжењер. Блиски је пријатељ Рене Декарту (Rene Descartes), а утицао је и на Блеза Паскала (Blaise Pascal). Својом теоријом инволуције и схватањем паралела као правих које имају пресјек у бесконачној удаљености, поставио је основе за каснији развој пројективне геометрије.

У VII разреду основне школе ученици могу на згодно постављеним троугловима у координатном систему провјерити аналитички вјеродостојност ове теореме. То је, наравно, задатак којим ће се ученици бавити дуже вријеме ван редовних часова, самостално – конструишући и рачунајући. У намјери да се рачунања поједноставе, може се предложити да се, на примјер врхови A и A_1 бирају на x-оси, врхови C и C_1 на y-оси, а E и E_1 на правој $y = c$. При избору координата, нека прикажу графички. Избор координата нека буде такав да осигурава сва три очекивана пресјека на милиметарском листу за цртање.

Марија је изабрала следеће координате за врхове троугла:

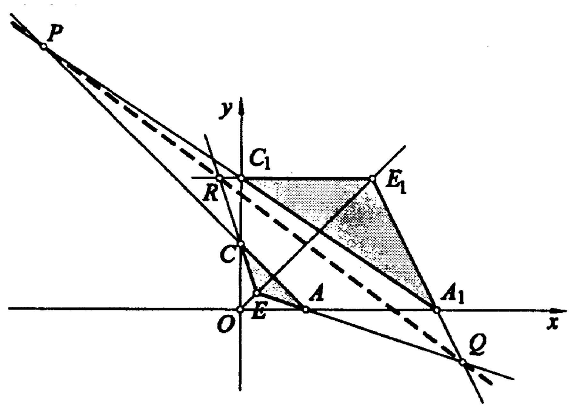
$$A(1,0),\quad A_1(3,0),\quad C(0,1),\quad C_1(0,2),\quad E(1/4,1/4),\quad \text{и}\quad E_1(2,2).$$

Горан је изабрао:

$$A(2,0),\quad A_1(8,0),\quad C(0,2),\quad C_1(0,4),\quad E(3/2,3/2),\quad \text{и}\quad E_1(2,2).$$

Марија је нацртала и слику.

Праве AA_1, CC_1 и EE_1 пролазе кроз координатни почетак па су копунктуалне. Тиме су услови Дезаргове теореме испуњени. Треба одредити координате пресјека одговарајућих страница и увјерити се да сва три припадају истој правој.



Слика 1

Тврђење Дезаргове теореме Марија провјерава графички (цртежом). Али, цртежом не можемо доказати колинеарност тачака. То можемо учинити аналитичком методом (рачунски).

Марија размишља овако. Нека је P пресјек правих AC и A_1C_1. Права AC има једначину $x + y = 1$. Права A_1C_1 има једначину $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$. Рјешавањем система једначина

$$x + y = 1, \qquad 2x + 3y = 6$$

добијамо координатне тачке пресјека правих AC и A_1C_1, тј. $P(-3,4)$.

Нека је Q пресјек правих AE и A_1E_1. Према формули

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

права AE има једначину $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. Слично, права A_1E_1 има једначину $y = -2x + 6$. Рјешавањем система једначина

$$x + 3y = 1, \qquad 2x + y = 6$$

долазимо до координата тачке пресјека правих AE и A_1E_1, тј. $Q\left(\frac{17}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Пронађимо још координате тачке R, као пресјека правих CE и C_1E_1. Једначина праве одређене тачкама C и E је $y = -3x = 1$. Једначина праве одређене тачкама C_1 и E_1 је $y = 2$ па тачка пресјека правих CE и C_1E_1 има координате $R\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$.

Тачке P, Q и R су колинеарне ако, на примјер, координате тачке Q уврштене у једначину праве PR дају идентитет. Лако је показати да једначина праве кроз тачке P и R гласи

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}.$$

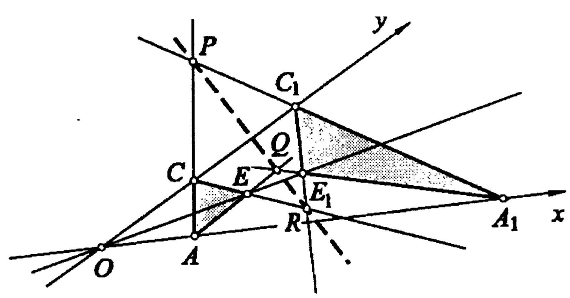
Замјеном координата тачке Q у једначину праве PR, долазимо до идентитета,

$$-\frac{4}{5} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{17}{5} + \frac{7}{4},$$

тј. $-\frac{4}{5} = -\frac{4}{5}$, што онда говори да тачка Q припада правој PR па смо се на овом појединачном случају увјерили у исправност Дезаргове теореме.

Дакако, тиме нисмо доказали Дезаргоеву теорему.

Међутим, у средњој школи ствари можемо поопштити.



Слика 2

У равни су задани троуглови $\triangle ACE$ и $\triangle A_1C_1E_1$ такви да су им праве одређене одговарајућим врховима копунктални, тј. $AA_1 \cap CC_1 \cap EE_1 = \{O\}$.

Присјетимо се метода афине геометрије па узмимо праву AA_1 за x-осу, а CC_1 за y-осу. Тада за координате врхова $\triangle ACE$ можемо узети $A(a,0)$, $C(0,d)$ и $E(e,f)$, при чему је $e \neq \frac{a}{2}$ и $f \neq \frac{d}{2}$. Тиме смо избјегли случај да је E средиште дужи AC, тј. да се $\triangle ACE$ трансформисао у дуж.

Координате врхова троугла $\triangle A_1C_1E_1$ су $A_1(a_1,0)$, $C_1(0,d_1)$ и $E_1(e_1,f_1)$, при чему је $a_1 \neq a$, $d_1 \neq d$ и тачка E_1 припада правој OE, тј. задовољава једначину $y = \frac{f}{e}\,x$. Координате тачке $E_1(e_1,f_1)$ бирамо тако да је

$$ef_1 - fe_1 = 0,$$

при чему је $e_1 \neq \frac{a_1}{2}$ и $f_1 \neq \frac{d}{2}$, како бисмо избјегли случај када је E_1 средиште дужи A_1C_1. Тиме смо осигурали координате врхова троугла којима су спојнице одговарајућих врхова копунктални.

Докажимо да су пресјеци одговарајућих страница колинеарни, тј. да пресјеци правих $AC \cap A_1C_1$, $AE \cap A_1E_1$ и $CE \cap C_1E_1$ леже на истој правој.

Одредимо координате пресјека P правих AC и A_1C_1, рјешавајући систем једначина састављен од сегментних облика једначина правих AC и A_1C_1, тј.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{d} = 1, \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{d_1} = 1.$$

Изједначавањем лијевих страна имамо:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{d} = \frac{x}{a_1} + \frac{y}{d_1}, \qquad x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) = y\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d}\right),$$

$$x \cdot \frac{a_1 - a}{aa_1} = y \cdot \frac{d - d_1}{dd_1}. \tag{1}$$

Замјеном израза за x у, на примјер, једначини праве AC долазимо до

$$\frac{1}{a}\left(\frac{d-d_1}{dd_1} \cdot \frac{aa_1}{a_1 - a}\right)y + \frac{1}{d}\,y = 1, \quad y \cdot \frac{aa_1(d-d_1) + ad_1(a_1 - a)}{add_1(a_1 - a)} = 1,$$

$$y = \frac{dd_1(a_1 - a)}{a_1d - a_1d_1 + a_1d_1 - ad_1}, \qquad y = \frac{dd_1(a_1 - a)}{a_1d - ad_1}. \tag{2}$$

Замјеном (2) у (1) долазимо до:

$$x = \frac{d - d_1}{dd_1} \cdot \frac{aa_1}{a_1 - a} \cdot \frac{dd_1(a_1 - a)}{a_1d - ad_1},$$

$$x = \frac{aa_1(d - d_1)}{a_1d - ad_1}. \tag{3}$$

Координате пресјека P правих $AC[A(a,0), C(0,d)]$ и $A_1C_1[A_1(a_1,0), C_1(0,d_1)]$ су

$$P\left(\frac{aa_1(d-d_1)}{a_1d - ad_1}, \frac{dd_1(a_1 - a)}{a_1d - ad_1}\right).$$

Програмом `Mathematica` налазимо координате пресјека P праве одређене тачкама $A(a,0)$ и $C(0,d)$ с правом одређеном тачкама $A_1(a_1,0)$ и $C_1(0,d_1)$.

```
Intersection2Lines [[{a_,0_},{0_,d_}],[{a1_,0_}]]:=
Simplify[{x,y}/.First[Solve[{x d+y a-a d= =0,
    x d1+y a1+a1 d1= =0}, {x,y}]].
```

Одредимо координате пресјека Q правих AE и A_1E_1, рјешавајући систем једначина задат једначинама правих AE и A_1E_1. Помоћу формуле за једначину праве кроз тачке $A(a,0)$ и $E(e,f)$ имамо:

$$y-0=\frac{f-0}{e-a}(x-a), \qquad y=\frac{f}{e-a}\,x-\frac{af}{e-a}. \tag{4}$$

Слично, за једначину кроз тачке $A_1(a_1,0)$ и $E_1(e_1,f_1)$ имамо

$$y=\frac{f_1}{e_1-a_1}\,x-\frac{a_1f_1}{e_1-a_1}. \tag{5}$$

Изједначимо ли десне стране једнакости (4) и (5), имамо:

$$\begin{gathered}
\frac{f}{e-a}\,x-\frac{af}{e-a}=\frac{f_1}{e_1-a_1}\,x-\frac{a_1f_1}{e_1-a_1},\\
x\left(\frac{f(e_1-a_1)-f_1(e-a)}{(e-a)(e_1-a_1)}\right)=\frac{af(e_1-a_1)-a_1f_1(e-a)}{(e-a)(e_1-a_1)},\\
x=\frac{af(e_1-a_1)-a_1f_1(e-a)}{f(e_1-a_1)-f_1(e-a)}. \qquad (6)
\end{gathered}$$

Замјеном (6) у (5) имамо:

$$\begin{gathered}
y=\frac{f_1}{e_1-a_1}\cdot\frac{af(e_1-a_1)-a_1f_1(e-a)}{f(e_1-a_1)-f_1(e-a)}-\frac{a_1f_1}{e_1-a_1},\\
Q\left(\frac{af(e_1-a_1)-a_1f_1(e-a)}{f(e_1-a_1)-f_1(e-a)},\ \frac{f_1}{e_1-a_1}\cdot\frac{af(e_1-a_1)-a_1f_1(e-a)}{f(e_1-a_1)-f_1(e-a)}-\frac{a_1f_1}{e_1-a_1}\right).
\end{gathered}$$

Програмом `Mathematica` налазимо координате пресјека Q праве одређене тачкама $A(a,0)$ и $E(e,f)$ с правом одређеном тачкама $A_1(a_1,0)$ и $E_1(e_1,f_1)$ наредбом

```
Intersection2Lines [[{a_,0_},{e_,f_}],[{a1_,0_}, {a1_,f1_}]]:=
Simplify[{x,y}/.First[Solve[{x f+y (a-e)-a f= =0, x f1+y
    (a1-e1)-a1 f1= =0}, {x,y}]].
```

Слично као у претходна два случаја налазимо координате тачке R која је пресјек правих CE и C_1E_1:

$$R\left(\frac{ee_1(d_1-d)}{(f-d)e_1-(f_1-d_1)e},\ \frac{e(f_1-d_1)(d_1-d)}{e_1(f-d)-e(f_1-d_1)}+d_1\right).$$

Програмом Mathematica те координате налазимо следећом наредбом.

```
Intersection2Lines [[{0,d_},{e_,f_}],[{0_,d1_}, {e1_,f1_}]]:=
Simplify[{x,y}/.First [Solve [{x (f-d)+y e-d e= =0,
    x (f1-d1)+y e1-d1 e1= =0}, {x,y}]].
```

Како бисмо показали да су тачке P, Q и R колинеарне, довољно је одредити једначину праве кроз двије од њих, на примјер, P и Q, а затим провјерити задовољавају ли координате тачке R једначину праве PQ. Рачун је изводљив, али је тежак. Далеко је брже послужити се програмом Mathematica, односно, функцијском наредбом за провјеру колинеарности тачака P, Q и R:

```
Colinear3PointsQ [{x1_,y1_} , {x2_,y2_} , {x3_,y3_}]:=
If Simplify{ValuePoint2Points[{x1,y1},{x2,y2},
    {x3,y3}]] = = =0, True, False].
```

Из свега изложеног јасно је да смо изради програма за доказивање Дезаргове теореме могли прићи након осмишљавања функцијских наредби:

Line2Points, тј. задавање једначине праве одређене с двије тачке познатих координата;

Intersection4Points, тј. одређивање пресјека двије праве, при чему је свака одређена са по двије тачке познатих координата;

ValuePoint2Points, којом провјеравамо припада ли тачка познатих координата правој одређеној са двије тачке заданих координата;

Colinear3Points, која нам директно одговара јесу ли три тачке на истој правој или нису.

Програм изгледа овако:

```
(*DESARGUESOVA TEOREMA*)
Clear[Line2Points, Intersection2Lines, Midle2Points, ValuePoint2Points,
    Colinear3pointsQ, Intersection4Points, TA1, TC1, TE1, TA2, TC2, TE2]
(*definiranje funkcijskih naredbi ... *)
Line2Points[{a_,b_}, {c_,d_}]:=Simplify[{b-d, c-a, ad-bc}];
Intersection2Lines [{a_,b_, c_}, {d_, e_, f_}]:=
    Simplify[{x,y}]/.  First [Solve[{ax+by+c= =0, dx+ey+f= =0}, {x,y}]];
ValuePoint2Points [{x,y_}, {a_, b_}, {c_,d_}]:=
    Simplify [(b-d)x+(c-a)y+ad-bc];
Colinear3PointsQ [{a_,b_}, {c_,d_}, {e_,f_}]:=
    If [Simplify [ValuePoint2Points [{a,b}, {c,d}, {e,f}]] = = =0, True, False];
Intersection4Points [{a_,b_}, {c_,d_}, {e_,f_}, {g_,h_}];=
    Intersection2Lines {Line2Points [{a,b}, {c,d}],
    Line2Points [{e,f}, {g,h}]};
True
```

Увјеримо се на Горановом примјеру да програм функционише.

```
(*Proba za trouglove TA1, TE1, TC1 i TA2, TE2, TC2*)
TC1={0,2}; TA1={2,0}; TE1={3/2, 3/2};
TC2={0,4}; TA2={8,0}; TE2={2,2};
(*uslov*)
ValuePoint2Points [Intersection4Points [TC1, TC2, TE1, TE2], TA1, TA2]
(*tvrdnja*)
Colinear3PointsQ [Intersection4Points [TA1, TC1, TA2, TC2],
    Intersection4Points [TA1, TE1, TA2, TE2],
    Intersection4Points [TE1, TC1, TE2, TC2]]
0
True
```

Предност ове методе је у чињеници да сада можемо теоретски на бесконачно много парова троуглова који испуњавају услов Дезаргове теореме (а и то провјеравамо овим програмом) констатовати колинеарност пресјека одговарајућих страница.

Др Радослав Милошевић, Универзитет у Источном Сарајеву, Филозофски факултет на Палама

ОБАВЕШТЕЊА

„КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА“

Друштво математичара Србије је од ове године у Србији самостални организатор међународног математичког такмичења **„Кенгур без граница“**. Ради се о једном од најмасовнијих такмичења на свету (неколико милиона учесника) које већ више година организује одговарајуће међународно удружење са седиштем у Паризу. ДМС има ексклузивну лиценцу тог удружења за организовање „Кенгура“ на територији Србије.

У циљу бољег обавештавања и популаризације овог такмичења, Друштво математичара Србије је објавило три свеске са решеним задацима са „Кенгура“ из 2005, 2006. и 2007. године.

Такмичење „Кенгур без граница“ одржано је 20. марта 2008. године, уз учешће близу 20 000 ученика.

Резултати ће бити послати школама-учесницама.

Наредно такмичење „Кенгур без граница“ одржаће се 19. марта 2009. године.

Све информације могу се видети на сајту Друштва `www.dms.org.yu`.