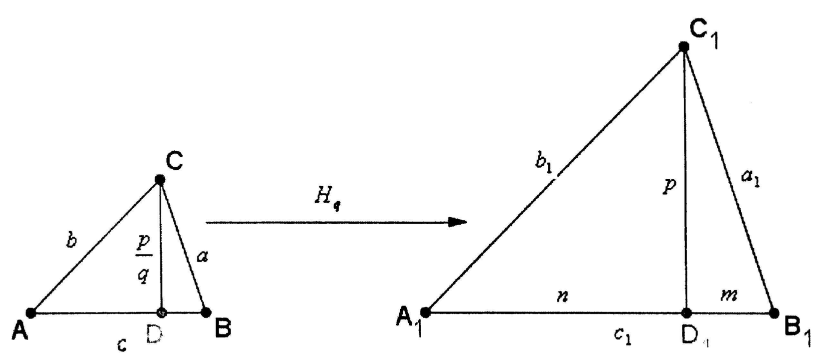
Мр Милан Живановић

ГЕНЕРИСАЊЕ ХЕРОНОВИХ ТРОУГЛОВА КОЈИ НЕМАЈУ ЦЕЛОБРОЈНИХ ВИСИНА

У чланку „Херонове тројке као аритметички низови" (Настава математике LI, 3–4) описан је поступак добијања Херонових троуглова слепљивањем или исецањем Питагориних троуглова. У том тексту је као пример наведена и тројка $(5, 29, 30)$ дужина страница Хероновог троугла коме ниједна висина није целобројна. Поставља се питање генерисања таквих троуглова.

У ту сврху применимо обратан редослед. Претпоставимо да је (a, b, c) тројка страница Хероновог троугла који нема ниједну целобројну висину и нека је НЗД$\,(a, b, c) = 1$. Нека је још $h_c = p/q$ висина са најмањим имениоцем од све три рационалне висине тог троугла тако да су p и q узајамно прости природни бројеви. Хомотетијом H_q, са коефицијентом q, тај троугао се пресликава у троугао са страницама $(a_1, b_1, c_1) = (qa, qb, qc)$. Према ознакама као на слици, висина тог троугла је $C_1D_1 = p$ и целобројна је. Да ли су троуглови $A_1D_1C_1$ и $B_1C_1D_1$ Питагорини?



Имамо да је: $m = \sqrt{a_1^2 - p^2}$, $n = \sqrt{b_1^2 - p^2}$ и $n = c - m$. Квадрирањем последње једнакости, после низа елементарних трансформација добија се да је: $m = \dfrac{c^2 + a_1^2 - b_1^2}{2c}$, $n = \dfrac{c^2 + b_1^2 - a_1^2}{2c}$, односно да су m и n рационални, па су као корени из природних бројева такође и природни. Закључујемо да су троуглови $A_1D_1C_1$ и $B_1C_1D_1$ Питагорини.

Важи још да је НЗД$(a_1, b_1, p) = 1$. Заиста, да је НЗД$(a_1, b_1, p) = d$, $d > 1$, морао би d бити делилац и од m и n, а самим тим и од c_1. Како d није делилац од q, јер је разломак p/q редукован, закључујемо да је d заједнички делилац од a, b, c. Ово је на крају супротно претпоставци да је НЗД$(a, b, c) = 1$.

Хомотетијом $H_{1/q}$ се Херонов троугао $A_1B_1C_1$ пресликава у Херонов троугао ABC који нема целобројних висина.

Пример 1. Применимо претходно описани поступак на троуглу са страницама $(5, 29, 30)$.

Полуобим троугла је $s = 32$, а површина $P = \sqrt{32 \cdot 27 \cdot 3 \cdot 2} = 72$. Висина која одговара страници $c = 30$ је $h_c = \dfrac{2P}{c} = \dfrac{24}{5}$. Хомотетијом са коефицијентом 5 дати троугао се пресликава у троугао $(25, 145, 150)$, а овај се може добити слепљивањем два основна Питагорина троугла $(7, 24, 25)$ и $(24, 143, 145)$ дуж заједничке катете 24. Инверзном хомотетијом се овако добијени троугао пресликава на полазни.

Пример 2. Постоји ли Херонов троугао без целобројних висина који је хомотетична слика Хероновог троугла са висином 147?

Нека је катета Питагориног троугла $y = 147$. Једначина за друге две странице таквих троуглова је $z^2 - x^2 = 21609$. Уз услов $z > x$ и $x, z \in \mathbf{N}$ ова једначина има за последицу тачно 7 система. Уочимо следећа два од тих седам система, заједно са њиховим решењима:

1. $(z + x = 21609 \wedge z - x = 1) \iff (z = 10805 \wedge x = 10804)$;
2. $(z + x = 2401 \wedge z - x = 9) \iff (z = 1205 \wedge x = 1196)$.

На тај начин добијамо следећа два Питагорина троугла: $(147, 10804, 10805)$ и $(147, 1196, 1205)$. Слепљивањем ова два троугла дуж једнаке катете $y = 147$, добија се Херонов троугао $(a_1, b_1, c_1) = (1205, 10805, 12000)$. Дељењем свих страница са 5 добија се Херонов троугао $(a, b, c) = (241, 2161, 2400)$ који нема целобројних висина.

Уопштењем последњег примера добија се читава класа Херонових троуглова међу којима је бесконачно много оних без целобројних висина. Нека је катета $y = (10k + 3)(10l + 9)$ где је $10l + 9 > 10k + 3$. Тада из система

$$z + x = (10l + 9)^2(10k + 3)^2 \wedge z - x = 1$$

имамо решење $z = \dfrac{(10l + 9)^2(10k + 3)^2 + 1}{2}$, $x = \dfrac{(10l + 9)^2(10k + 3)^2 - 1}{2}$, а из система

$$z + x = (10l + 9)^2 \wedge z - x = (10k + 3)^2$$

решење $z = \dfrac{(10l + 9)^2 + (10k + 3)^2}{2}$, $x = \dfrac{(10l + 9)^2 - (10k + 3)^2}{2}$.

На крају, слепљивањем одговарајућих Питагориних троуглова, и после деобе свих страница са 5, добија се тражена класа

$$\left(\frac{(10l+9)^2+(10k+3)^2}{10}, \frac{(10l+9)^2(10k+3)^2+1}{10}, \right.$$
$$\left. \frac{(10l+9)^2(10k+3)^2-1}{10}+\frac{(10l+9)^2-(10k+3)^2}{10}\right).$$

За $k=0$ и $l=1$ добијамо Херонов троугао $(37,325,360)$ без целобројних висина. Полуобим тог троугла $s=361$, и величине $s-a=324$, $s-b=36$ и $s-c=1$ су потпуни квадрати. У табели 1 су представљени Херонови троугли ове класе за $k=0$ и $l=0,1,2,\ldots,9$.

a	b	c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	P
37	325	360	361	324	36	1	2052
85	757	840	841	756	84	1	7308
153	1369	1520	1521	1368	152	1	17784
241	2161	2400	2401	2160	240	1	35280
349	3133	3480	3481	3132	348	1	61596
477	4285	4760	4761	4284	476	1	98532
625	5617	6240	6241	5616	624	1	147888
793	7129	7920	7921	7128	792	1	211464
981	8821	9800	9801	8820	980	1	291060
1189	10693	11880	11881	10692	1188	1	388476

Табела 1

Ова класа Херонових троуглова има још једну занимљиву особину. Низ висина које одговарају највећим страницама ових троуглова чини аритметички низ са првим чланом 11,4 и разликом 6.

У случају $10l+9<10k+3$ бесконачно много Херонових троуглова без целобројних висина се добија исецањем Питагориних троуглова уз хомотетију са коефицијентом $1/5$. Класа таквих троуглова задата је формулама

$$\left(\frac{(10l+9)^2+(10k+3)^2}{10}, \frac{(10l+9)^2(10k+3)^2+1}{10}, \right.$$
$$\left. \frac{(10l+9)^2(10k+3)^2-1}{10}-\frac{(10l+9)^2-(10k+3)^2}{10}\right).$$

У табели 2 су задати Херонови троуглови ове класе за $l=0$ и $k=1,2,\ldots,10$.

Низ висина ових троуглова које одговарају страници c је аритметички низ са првим чланом 23,4 и разликом 18.

Поступак грађења нових класа можемо наставити помоћу Питагориних троуглова којима је једна катета $y=(10k+1)(10l+3)$.

a	b	c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	P
25	1369	1360	1377	1352	8	17	15912
61	4285	4240	4293	4232	8	53	87768
117	8821	8720	8829	8712	8	109	258984
193	14977	14800	14985	14792	8	185	572760
289	22753	22480	22761	24472	8	281	1072296
405	32149	31760	32157	31752	8	397	1800792
541	43165	42640	43173	42632	8	533	2801448
697	55801	55120	55809	55112	8	689	4117464
873	70057	69200	70065	69192	8	865	5792040
1069	85933	84880	85941	84872	8	1061	7868376

Табела 2

Прво, у случају $5(k-l) > 1$, после слепљивања и хомотетије са коефицијентом $1/5$ добијамо класу

$$\left(\frac{(10k+1)^2+(10l+3)^2}{10}, \frac{(10k+1)^2(10l+3)^2+1}{10}, \frac{(10k+1)^2(10l+3)^2-1}{10} + \frac{(10k+1)^2-(10l+3)^2}{10}\right),$$

а у табели 3 и Херонове троугле ове класе за $l = 0$ и $k = 1, 2, \ldots, 10$.

a	b	c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	P
13	109	120	121	108	12	1	396
45	397	440	441	396	44	1	2772
97	865	960	961	864	96	1	8928
169	1513	1680	1681	1512	168	1	20664
261	2341	2600	2601	2340	260	1	39780
373	3349	3720	3721	3348	372	1	68076
505	4537	5040	5041	4536	504	1	107352
657	5905	6560	6561	5904	656	1	159408
829	7453	8280	8281	7452	828	1	226044
1021	9181	10200	10201	9180	1020	1	309060

Табела 3

У случају $5(k-l) < 1$, одговарајућа класа је

$$\left(\frac{(10k+1)^2+(10l+3)^2}{10}, \frac{(10k+1)^2(10l+3)^2+1}{10}, \frac{(10k+1)^2(10l+3)^2-1}{10} - \frac{(10k+1)^2-(10l+3)^2}{10}\right),$$

а добија се исецањем Питагориних троуглова и истом хомотетијом. Примери за $k = 1$ и $l = 1, 2, \dots, 10$ су дати у табели 4.

a	b	c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	P
29	2045	2040	2057	2028	12	17	29172
65	6401	6360	6413	6348	12	53	160908
121	13177	13080	13189	13068	12	109	474804
197	22373	22200	22385	22188	12	185	1050060
293	33989	33720	34001	33708	12	281	1965876
409	48025	47640	48037	47628	12	397	3301452
545	64481	63960	64493	63948	12	533	5135988
701	83357	82680	83369	82668	12	689	7548684
877	104653	103800	104665	103788	12	865	10618740
1073	128369	127320	128381	127308	12	1061	14425356

Табела 4

У следећим примерима класа, дати су услови егзистенције класе, формуле класе и табеле неколико примера тих троуглова.

1. а) За $5(k-l) > 6$ имамо класу

$$\Bigg(\frac{(10k+1)^2+(10l+7)^2}{10}, \frac{(10k+1)^2(10l+7)^2+1}{10}, \frac{(10k+1)^2(10l+7)^2-1}{10} + \frac{(10k+1)^2-(10l+7)^2}{10}\Bigg),$$

насталу слепљивањем Питагориних троуглова са катетом $y = (10k+1)(10l+7)$ и накнадном хомотетијом. У табели 5 су дати подаци за $l = 0$ и $k = 1, 2 \dots, 10$.

a	b	c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	P
17	593	600	605	588	12	5	4620
49	2161	2200	2205	2156	44	5	32340
101	4709	4800	4805	4704	96	5	104160
173	8237	8400	8405	8232	168	5	241080
265	12745	13000	13005	12740	260	5	464100
377	18233	18600	18605	18228	372	5	794220
509	24701	25200	25205	24696	504	5	1252440
661	32149	32800	32805	32144	656	5	1859760
833	40577	41400	41405	40572	828	5	2637180
1025	49985	51000	51005	49980	1020	5	3605700

Табела 5

1. б) За $5(k-l)<6$ имамо класу

$$\left(\frac{(10k+1)^2+(10l+7)^2}{10}, \frac{(10k+1)^2(10l+7)^2+1}{10}, \frac{(10k+1)^2(10l+7)^2-1}{10} - \frac{(10k+1)^2-(10l+7)^2}{10}\right),$$

насталу исецањем Питагориних троуглова са катетом $y=(10k+1)(10l+7)$ и већ поменутом хомотетијом. У табели 6 су дати подаци за $k=1$ и $l=1,2\dots,10$.

a	b	c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	P
41	3497	3480	3509	3468	12	29	65076
85	8821	8760	8833	8748	12	73	260172
149	16565	16440	16577	16428	12	137	669108
233	26729	26520	26741	26508	12	221	1371084
337	39313	39000	39325	38988	12	325	2445300
461	54317	53880	54329	53868	12	449	3970956
605	71741	71160	71753	71148	12	593	6027252
769	91585	90840	91597	90828	12	757	8693388
953	113849	112920	113861	112908	12	941	12048564
1157	138533	137400	138545	137388	12	1145	16171980

Табела 6

2. а) За $5(l-k)<1$ добија се класа

$$\left(\frac{(10k+9)^2+(10l+7)^2}{10}, \frac{(10k+9)^2(10l+7)^2+1}{10}, \frac{(10k+9)^2(10l+7)^2-1}{10} + \frac{(10k+9)^2-(10l+7)^2}{10}\right),$$

која настаје после слепљивања Питагориних троуглова са заједничком катетом $y=(10k+1)(10l+7)$ и већ коришћене хомотетије. У табели 7 дати су примери ове класе троуглова за $l=0$ и $k=0,1,2,\dots,9$.

2. б) На крају, за $5(l-k)>1$, исецањем се добија класа Питагориних троуглова са заједничком катетом $y=(10k+1)(10l+7)$ и коришћенем познате хомотетије добија се класа

$$\left(\frac{(10k+9)^2+(10l+7)^2}{10}, \frac{(10k+9)^2(10l+7)^2+1}{10}, \frac{(10k+9)^2(10l+7)^2-1}{10} - \frac{(10k+9)^2-(10l+7)^2}{10}\right),$$

Примери троуглова ове класе за $k=0$ и $l=1,2,\dots,10$ дати су у табели 8.

a	b	c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	P
13	397	400	405	392	8	5	2520
41	1769	1800	1805	1764	36	5	23940
89	4121	4200	4205	4116	84	5	85260
157	7453	7600	7605	7448	152	5	207480
245	11765	12000	12005	11760	240	5	411600
353	17057	17400	17405	17052	348	5	718620
481	23329	23800	23805	23324	476	5	1149540
629	30581	31200	31205	30576	624	5	1725360
797	38813	39600	39605	38808	792	5	2467080
985	48025	49000	49005	48020	980	5	3395700

Табела 7

a	b	c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	P
37	2341	2320	2349	2312	8	29	35496
81	5905	5840	5913	5832	8	73	141912
145	11089	10960	11097	10952	8	137	364968
229	17893	17680	17901	17672	8	221	747864
333	26317	26000	26325	25992	8	325	1333800
457	36361	35920	36369	35912	8	449	2165976
601	48025	47440	48033	47432	8	593	3287592
765	61309	60560	61317	60552	8	757	4741848
949	76213	75280	76221	75272	8	941	6571944
1153	92737	91600	92745	91592	8	1145	8821080

Табела 8

Већ из приложених табела може се уочити да у датим класама има троуглова са целобројним висинама, па чак и троуглова који нису прави Херонови (странице им нису представљене узајамно простим бројевима). Стога наведени алгоритам отвара следеће проблеме:

1. Одредити услове под којима у наведеним класама настају троуглови са целобројним висинама.

2. Одредити класе Херонових троуглова без целобројних висина које настају из Питагориних троуглова са заједничком парном катетом и накнадном хомотетијом. (Такви троуглови су, рецимо, $(5, 29, 30)$ и $(17, 65, 80)$).

3. Постоје ли и други Херонови троуглови сем $(17, 65, 80)$ и $(37, 325, 360)$ којима су све четири величине s, $s-a$, $s-b$ и $s-c$ потпуни квадрати?

4. Доказати да је низ висина које одговарају страници c, у претходно дефинисаним класама троуглова, аритметички.

Милан Живановић, Техничка школа, Бајина Башта, *E-mail*: `milanzibb@sezampro.yu`