Живан Шушулић

ПЕЛОВА ЈЕДНАЧИНА И ПИТАГОРИНЕ ТРОЈКЕ

Диофантова једначина облика

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где је d природан број који није потпун квадрат, зове се Пелова једначина.

Свака Пелова једначина има бесконачно много решења у скупу природних бројева [1]. Уколико пронађемо најмање (основно) решење (x_e, y_e), преостала решења (x_n, y_n) можемо генерисати на следеће начине:

$$(1) \qquad x_n + y_n\sqrt{d} = (x_e + y_e\sqrt{d})^n,$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} &x_{n+1} = 2x_e x_n - x_{n-1}, \\ &y_{n+1} = 2x_e y_n - y_{n-1}, \quad \text{услови: } (x_0, y_0) = (1, 0),\ (x_1, y_1) = (x_e, y_e), \end{aligned}$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} &x_{n+1} = x_e x_n + y_e d y_n, \\ &y_{n+1} = x_e y_n + y_e x_n. \end{aligned}$$

1. Решавање Пелове једначине помоћу верижних разломака

Коначним верижним разломком назива се израз облика

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots \; q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

где је q_0 цео ненегативан број, а q_1, q_2, ... , q_n природни бројеви, при чему је $q_n \neq 1$. Верижни разломак краће записујемо као $[q_0;\, q_1, q_2, \ldots, q_n]$.

Ирационалним бројевима облика $\sqrt{d}$, где је d природан број који није потпун квадрат, одговарају бесконачни верижни разломци [2] облика

$$\sqrt{d} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n, 2q_0, q_1, q_2, \ldots],$$

односно $\sqrt{d} = \lfloor q_0; \overline{q_1, q_2, \ldots, q_n, 2q_0} \rfloor$. Такође је $q_n = q_1$, $q_{n-1} = q_2$ и тако даље.

Пример 1. Разложити $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$ и $\sqrt{19}$ у одговарајуће верижне разломке.

а) $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{x_1}$, $\dfrac{1}{x_1}=\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{1}{2\cdot 1+\sqrt{2}-1}=\dfrac{1}{2\cdot 1+\dfrac{1}{x_1}}$,

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}},\quad \sqrt{2}=[1;2,2,2,\ldots]=\lfloor 1;\overline{2}\rfloor.$$

б) $\sqrt{3}=1+\dfrac{1}{x_1}$, $\dfrac{1}{x_1}=\sqrt{3}-1=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$,

$$\frac{1}{x_2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{2}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{2+\sqrt{3}-1}=\frac{1}{2+\dfrac{1}{x_1}},$$

$\sqrt{3}=\lfloor 1;\overline{1,2}\rfloor$.

в) $\sqrt{13}=3+\dfrac{1}{x_1}$, $\dfrac{1}{x_1}=\sqrt{13}-3=\dfrac{4}{\sqrt{13}+3}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+3}{4}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{13}-1}{4}}$,

$$\frac{1}{x_2}=\frac{\sqrt{13}-1}{4}=\frac{12}{4(\sqrt{13}+1)}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+1}{3}}=\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{13}-2}{3}},$$

$$\frac{1}{x_3}=\frac{\sqrt{13}-2}{3}=\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{13}-1}{3}},\quad \frac{1}{x_4}=\frac{\sqrt{13}-1}{3}=\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{13}-3}{4}},$$

$$\frac{1}{x_5}=\frac{\sqrt{13}-3}{4}=\frac{1}{6+\sqrt{13}-3}=\frac{1}{6+\dfrac{1}{x_1}},$$

$\sqrt{13}=\lfloor 3;\overline{1,1,1,1,6}\rfloor$.

г) $\sqrt{19}=\lfloor 4;\overline{2,1,3,1,2,8}\rfloor$.

Нека је $\sqrt{d}=\lfloor q_0;\overline{q_1,q_2,\ldots,q_n,2q_0}\rfloor$ и

$$\frac{A_n}{B_n}=[q_0;\,q_1,q_2,\ldots,q_n]=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots\,q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Познато је да је $A_n^2-dB_n^2=(-1)^{n-1}$. Отуда $x_e=A_n$ и $y_e=B_n$ доводи до решења једначине

$$x^2-dy^2=(-1)^{n-1}.$$

Ако је n непаран број, имамо основно решење Пелове једначине. Ако је n паран број, онда је $x_e = A_{2n+1}$ и $y_e = B_{2n+1}$.

Пример 2. Одредити основно решење једначине $x^2 - 19y^2 = 1$.

Решење. $\sqrt{19} = \lfloor 4; \overline{2,1,3,1,2,8} \rfloor$, $n = 5$,

$$\frac{A_n}{B_n} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{170}{39}.$$

Основно решење једначине је $(x_e, y_e) = (170, 39)$.

Пример 3. У скупу природних бројева решити једначину $x^2 - 13y^2 = 1$.

Решење. $\sqrt{13} = \lfloor 3; \overline{1,1,1,1,6} \rfloor$, $n = 4$. $\dfrac{A_9}{B_9} = \dfrac{649}{180}$, основно решење је $(x_e, y_e) = (649, 180)$. $x_n + y_n\sqrt{13} = (649 + 180\sqrt{13})^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Пример 4. У скупу природних бројева решити једначину $x^2 - 2y^2 = 1$.

Решење. $\sqrt{2} = \lfloor 1; \overline{2} \rfloor$, $\dfrac{A_1}{B_1} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $(x_e, y_e) = (3, 2)$. Из система $x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$, $y_{n+1} = 6y_n - y_{n-1}$ и почетних услова $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $(x_1, y_1) = (3, 2)$ се добија, редом,

n	1	2	3	4	5	...
x_n	3	17	99	577	3363	...
y_n	2	12	70	408	2378	...

2. Једначине Пеловог типа

Под једначином Пеловог типа подразумевамо једначину облика

$$x^2 - dy^2 = a, \tag{1}$$

где је d природан број који није потпун квадрат и $a \neq 0$ цео број.

За $a = 1$ имамо Пелову једначину која увек има решења. За разлику од ње, неке једначине Пеловог типа немају целобројна решења.

Пример 5. Показати да једначина $x^2 - 3y^2 = -1$ нема целобројних решења.

Решење. Како израз $x^2 + 1$ није дељив са 3 ни за једно $x \in \mathbf{Z}$, то дата једначина нема решења.

Ако је (x_0, y_0) неко (довољно мало) решење једначине (1) и ако је (x_e, y_e) основно решење одговарајуће Пелове једначине, онда су једнакошћу

$$x + y\sqrt{d} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{d})(x_e + y_e\sqrt{d})^n$$

одређена сва решења једначине (1) [1]. За даље разматрање наводимо без доказа (доказ је елементаран) следеће тврђење.

Теорема 1. *Ако је пар* (A, B) *једно решење једначине* $x^2 - dy^2 = a$, *а пар* (U, V) *једно решење једначине* $x^2 - dy^2 = b$, *онда је пар* $(AU + dBV, AV + BU)$ *једно решење једначине* $x^2 - dy^2 = ab$.

Специјално за $a = b$ пар $(A^2 + dB^2, 2AB)$ је једно решење једначине

$$x^2 - dy^2 = a^2 \tag{2}$$

којом ћемо се даље бавити.

Пример 6. Одредити основно решење једначине $x^2 - 5y^2 = 1$.

Решење. Како је најмање позитивно решење једначине $x^2 - 5y^2 = -1$ пар $(2, 1)$, то је пар $(2^2 + 5 \cdot 1^2, 2 \cdot 2 \cdot 1) = (9, 4)$ тражено решење.

Пример 7. У скупу целих бројева решити једначине:

а) $x^2 - 3y^2 = -11$; б) $x^2 - 3y^2 = 121$.

Решење. а) Најмање позитивно решење је пар $(x_0, y_0) = (1, 2)$, а основно решење одговарајуће Пелове једначине је пар $(x_e, y_e) = (2, 1)$. Сада су решења дата формулом $x + y\sqrt{3} = \pm(\pm 1 + 2\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n$, $n \in \mathbf{N}_0$.

б) Најмање позитивно решење је $(1^2 + 3 \cdot 2^2, 2 \cdot 1 \cdot 2) = (13, 4)$. Решења једначине дата су формулама

$$x + y\sqrt{3} = \pm(13 \pm 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n, \quad n \in \mathbf{N}_0,$$
$$x + y\sqrt{3} = \pm 11(2 + \sqrt{3})^n, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Пример 8. У скупу целих бројева решити једначину $x^2 - 3y^2 = 169$.

Пар $(14, 3)$ је најмање позитивно решење једначине, а сва целобројна решења су дата формулама

$$x + y\sqrt{3} = \pm(14 \pm 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n, \quad n \in \mathbf{N}_0;$$
$$x + y\sqrt{3} = \pm 13(2 + \sqrt{3})^n, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

x	13	14	19	26	37	62	91	134	229	338	...
y	0	3	8	13	20	35	52	77	132	195	...

Пример 9. У скупу природних бројева решити једначину $x^2 - 2y^2 = -17^2$.

Решење. За налажење једног од најмањих решења једначине можемо искористити најмање позитивно решење једначине $x^2 - 2y^2 = -1$, пар $(1, 1)$, и решење једначине $x^2 - 2y^2 = -17$, пар $(-1, 3)$. Сада је на основу теореме 1, $x_0 + y_0\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})(-1 + 3\sqrt{2})^2$, односно $x_0 + y_0\sqrt{2} = 7 + 13\sqrt{2}$. Добијају се решења

x	7	17	31	73	119	193	431	697	...
y	13	17	25	53	85	137	305	493	...

3. Налажење Питагориних тројки помоћу једначина Пеловог типа

Тројке природних бројева (a, b, c) које задовољавају једначину

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3}$$

представљају Питагорине тројке. Такве тројке код којих су a, b, c узајамно прости у паровима називамо примитивним тројкама. Налажењем примитивних решења једначине (3) налазимо и сва остала, јер су она облика (ka, kb, kc), $k \in \mathbf{N}$.

Претпоставимо да је $a < b$ и да је $b - a = z$. Тада заменом у (3) имамо $a^2 + (a+z)^2 = c^2$, односно после сређивања,

$$2a^2 + 2za + z^2 - c^2 = 0.$$

Решење ове једначине је $a = \dfrac{\sqrt{2c^2 - z^2} - z}{2}$, па мора бити $2c^2 - z^2 = x^2$, односно

$$x^2 - 2c^2 = -z^2. \tag{4}$$

Једначина (4) је Пеловог типа. Даље следи да је $a = \dfrac{x-z}{2}$, $b = \dfrac{x+z}{2}$.

Пример 10. Одредити Питагорине тројке код којих је $b - a = 1$.

Решење. Проблем се своди на решавање једначине $x^2 - 2c^2 = -1$. Видели смо да је најмање позитивно решење $(x_0, c_0) = (1, 1)$, а $(x_1, c_1) = (7, 5)$. Питагорине тројке дате су у следећој табели (осим колоне за $n = 0$ која представља почетни услов одговарајуће рекурентне везе).

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	1	7	41	239	1393	8119	47321
a_n	0	3	20	119	696	4059	23660
b_n	1	4	21	120	697	4060	23661
c_n	1	5	29	169	985	5741	33461

За даљи рад користићемо очигледне везе Питагориних бројева:

$$(b+a)^2 - 2c^2 = -(b-a)^2, \tag{5}$$

$$(b-a)^2 - 2c^2 = -(b+a)^2. \tag{6}$$

За тројку $(3, 4, 5)$ имамо да је $1^2 - 2 \cdot 5^2 = -7^2$, односно да је пар $(x_0, c_0) = (1, 5)$ најмање позитивно решење једначине $x^2 - 2c^2 = -49$.

Пример 11. Одредити Питагорине тројке код којих је $b - a = 7$.

Решење. Пар бројева (x_0, c_0) генерише решења

$$x'_n + c'_n\sqrt{2} = (1 + 5\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n,$$

а пар $(-x_0, c_0) = (-1, 5)$,

$$x''_n + c''_n\sqrt{2} = (-1 + 5\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

n	x'_n	a'_n	b'_n	c'_n
1	23	8	15	17
2	137	65	72	97
3	799	396	403	565
4	4657	2325	2332	3293
5	27143	13568	13575	19193

n	x''_n	a''_n	b''_n	c''_n
1	17	5	12	13
2	103	48	55	73
3	601	297	304	425
4	3503	1748	1755	2477
5	20417	10205	10212	14437

Наравно да и пар бројева $(1,1)$, најмање позитивно решење једначине $x^2 - 2c^2 = -1$ генерише решења $x_n + c_n\sqrt{2} = 7(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n$, $n \in \mathbf{N}$.

n	x_n	a_n	b_n	c_n
1	49	21	28	35
2	287	140	147	203
3	1673	833	840	1183
4	9751	4872	4879	6895
5	56833	28413	28420	40187

У овом случају добијамо тројке које нису примитивне.

За налажење тројки (a,b,c) можемо користити и рекурентне везе

$$a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1} + 14, \quad b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} - 14, \quad c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1},$$

уз одговарајуће почетне услове.

Ако је $b - a = z$, рекурентне везе су

$$a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1} + 2z, \quad b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} - 2z, \quad c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1},$$

Пример 12. Одредити Питагорине тројке код којих је $b - a = 17$.

Упутство. Искористити Питагорину тројку $(5,12,13)$ за решавање једначине $x^2 - 2c^2 = -17^2$, одакле је $(12-5)^2 - 2 \cdot 13^2 = -(12+5)^2$.

Из веза (5) и (6) и теореме 1 следи наредно тврђење.

Теорема 2. *Ако је (a,b,c) Питагорина тројка, онда је и (A,B,C) Питагорина тројка, где је*

$$A = 2a + b + 2c, \quad B = a + 2b + 2c, \quad C = 2a + 2b + 3c.$$

Такође је $B - A = b - a$.

Доказ. Пар $(a+b, c)$ је једно решење једначине $x^2 - 2y^2 = -(b-a)^2$ а пар $(3,2)$ је основно решење одговарајуће Пелове једначине. На основу теореме 1 решење дате једначине је и пар $(3(a+b)+4c, 2(a+b)+3c) = (3a+3b+4c, 2a+2b+3c) = (A+B, C)$.

Из система

$$A + B = 3a + 3b + 4c, \quad B - A = b - a$$

добијамо везе за A, односно за B. Веза за C следи непосредно из једнакости уређених парова. Даље ове везе можемо записати и на следећи начин

$$(A,B,C) = (a,b,c)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (a,b,c)P, \qquad B - a = b - a.$$

Сада се сва решења примера 10 изражавају формулом

$$(A,B,C) = (3,4,5) \cdot P^n, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Следеће тврђење наводимо без доказа.

Теорема 3. *Ако је (a,b,c) Питагорина тројка, онда су и (A_1,B_1,C_1) и (A_2,B_2,C_2) Питагорине тројке, где је*

$$\begin{aligned} A_1 &= -2a+b+2c \qquad & A_2 &= a-2b+2c \\ B_1 &= -a+2b+2c \qquad & B_2 &= 2a-b+2c \\ C_1 &= -2a+2b+3c \qquad & C_2 &= 2a-2b+3c \end{aligned}$$

Такође је $B_1-A_1=B_2=A_2=b-a$.

Записаћемо ове везе и помоћу матрица:

$$(A_1,B_1,C_1)=(a,b,c)\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}=(a,b,c)\cdot Q,$$

$$(A_2,B_2,C_2)=(a,b,c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}=(a,b,c)\cdot R.$$

Даље закључујемо да су све Питагорине тројке код којих је $A<B$ дате формулом

$$(A,B,C)=k\cdot(3,4,5)\cdot P^p\cdot Q^q\cdot R^r, \qquad p,q,r\in\mathbf{N}_0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: ***Увод у теорију бројева***, Материјали за младе математичаре 15, 4-то издање, Друштво математичара Србије, Београд 2004.
2. А. Золић: ***Верижни разломци и примјене***, Настава математике **XLV**, 3–4, 2000.
3. I. Vidav: *Rešeni i nerešeni problemi matematike*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1975.
4. Pythagorean triangles where $a-b$ is constant. Pythagorean triangles preserving matrices, `www.math.rutgers.edu`
5. J. Robertson: *Solving the generalized Pell equation $x^2-dy^2=N$.*

Живан Шушулић, ОШ „8. октобар“, Власотинце