Др Милосав М. Марјановић

ДИДАКТИЧКА АНАЛИЗА ПОЧЕТНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ПОЈМОВА, I[1]

> *The main point I tried to get across is that geometry is not so much a branch of mathematics as a way of thinking that permeates all branches.*[2]
>
> *Michael Atiyah*[3]

У чланку се бавимо анализом геометријских садржаја у млађим разредима основне школе. Аутор је неколико година предавао Методику математике студентима Учитељског факултета Универзитета у Београду. Да би се уписали, претпоставља се да су завршили средњу школу, најчешће гимназију. Будући да су учили математику кроз све те године у школи, исто тако се претпоставља да су довољно упознати са елементарном математиком (алгебра, еуклидска геометрија, тригонометрија и аналитичка геометрија). И наше је чврсто уверење да је та количина математике довољна за професионално формирање тих студената. Штавише, ако је неопходан курс математике независно од Методике математике, онда би то требало да буде репетиторијум садржаја елементарне математике (укључујући разблажене основе наивне теорије скупова и математичке логике). Чланци [4], [5] и [12] указују на недостатак професионалних вештина учитеља и разматрају путеве њиховог побољшања.

Закључујући опет из личног искуства, сматрамо да је неопходно да студенти на наставничким институцијама, пре свега, добију темељну дидактичку анализу свих садржаја које ће срести у наставничкој пракси. Према Фројденталовим моделима ([7], [8]), под дидактичком анализом подразумевамо разматрање садржаја кроз његово разлагање на саставне делове и затим, његову реорганизацију према усвојеним дидактичким задацима. У овом чланку наша ће разматрања бити усредсређена на геометрију у млађим разредима основне школе, када су сви садржаји на интуитивном нивоу.

[1] Делимичан превод чланка M. M. Marjanović: *Didactical analysis of primary geometric concepts, II*, The Teaching of Mathematics, X, 1 (2007), 11–36.

[2] Најважније што сам хтео да истакнем јесте да геометрија није толико грана математике, колико начин размишљања који прожима све њене гране.

[3] Мајкл Атија, савремени енглески математичар, добитник Филдсове награде 1966. године, највећег признања у математици.

Школска геометрија је, како се то обично прихвата, мање или више поједностављена верзија еуклидске геометрије. Историјски извор ове математичке дисциплине су Еуклидови *Елементи* и стога је овај чисто научни рад био основа за формирање школских курсева геометрије. У том погледу геометрија се налази у потпуном контрасту с аритметиком, пошто учење последње почиње са широком интуитивном основом из које се изводе значења аритметичких апстракција и стичу сазнања о формалним својствима бројева и операција пре него што се ова својства формулишу као основни закони система бројева. Да бисмо сугерисали аналогију, рецимо да би могућа дидактичка трансформација Пеанове аксиоматике личила на такву трансформацију геометрије. Следећи чланци приказују стање наставе и учења геометрије током последњих сто година: [6] покрива период првих година часописа "L'Enseignement Mathématique", [10] покрива турбулентни период од 1950. до 1970. а [13] покрива период 2000. и касније.

Као што је добро познато, формално научно излагање неке области знања, а то је био случај с Еуклидовим радом, води неизбежно до губљења веза његових садржаја реалног света који су допринели њиховом генерисању. Када се такво излагање узме као полазиште за дидактичку трансформацију његовог садржаја, онда се постојеће апстракције морају учинити блиским реалности. И заиста је боље ако се неки аспекти реалности могу учинити таквима да воде до креирања таквих апстракција. Покушај ове врсте била је холандска пропедевтичка геометрија из прве половине 20-ог века (Татјана Афанасјева Еренфест, Паул Еренфест и други). Исто тако, Пијажеова експериментална открића и његова класификација интуитивних геометријских појмова као тополошких, пројективних или метричких по природи дала су значајан подстицај одабиру и организацији геометријских садржаја у основној школи. (Добар преглед анализе стварности уз помоћ геометријских појмова представљен је у [18]).

Распрострањена је пракса да се почиње са обучавањем и учењем геометрије у духу Еуклида када су деца дванаест година или старија. У таквом курсу неки појмови остају недефинисани (примери су: тачка, линија, права линија, дуж и сл.), неки други су дефинисани (изломљена линија, кружна линија, угао и сл.), неке чињенице се претпостављају, неке друге доказују. Такав план излагања подсећа на Елементе на превише експлицитан начин и деца тог узраста су збуњена свим тим стварима које добијају смисао само на нивоу дедуктивног закључивања. Цртањем геометријских слика сложени појмови добијају визуелно значење али и даље остају без својих интуитивних корена који су својствени предметима у реалном окружењу. На тај начин, главни предмет геометрије у млађим разредима основне школе може се метафорички изразити као тражење значења која су изгубљена. Даље, нагласимо да, пројектовањем историјске перспективе, можемо уочити следећа три нивоа школске геометрије:

- интуитивна геометрија;
- геометрија у духу Талеса и Питагоре – предеуклидска геометрија;
- еуклидска геометрија.

У одељцима који следе посматраћемо садржаје интуитивне геометрије који су обично укључени у програме млађих разреда основних школа. Упркос чињеници да се ови садржаји односе на појаве у реалном свету, захтев за логичком сређеношћу и редоследом њиховог излагања је значајан као и у случају наставе и учења на вишим нивоима.

Негативна карактеристика геометрије у основној школи је широка разноврсност начина на које се њени садржаји одабирају и разрађују. Зависно од назначених тенденција (од стране планера курикулума, аутора уџбеника, итд), ова наставна дисциплина се често схвата као хеуристика која помаже деци да развију своје опажајне и логичке способности. Без описа главних чињеница и циљева које треба изабрати за разраду, ова би дисциплина могла да се претвори у гомилу разноврсних интелектуалних игара са неизвесним образовним ефектима. Најгора од свих њих су досадна излагања пуна објашњавања необјашњеног која „причају" деци шта су дужи, праве линије и други појмови. По нашем мишљењу, главни циљ геометрије у млађим разредима основне школе је припрема деце за етапу која долази после тога – предеуклидску геометрију. То значи да деца треба да усвоје интуитивна значења свих основних појмова предеуклидске геометрије и оспособе се за њихово представљање геометријским цртежима. И насупрот уобичајеном уверењу, овај елементарни део геометрије мора бити добро организован, јасно заснован и прецизно изложен.

У вези са избором геометријских садржаја на том, првом нивоу, сматрамо да је следећи списак тема сасвим задовољавајући:

Речи које означавају просторне односе предмета у природном окружењу. Препознавање основних геометријских облика (троугаони, кружни, правоугаони, облик квадра, цилиндрични, сферни).

Тачка, линија, површ (у равни: фигура). Отворене и затворене линије. Линије које су праве: дуж, полуправа, права. Углови (оштри, прави, тупи). Кружница. Квадрат и правоугаоник (конструкција тих фигура). Коцка и квадар.

Јединице за мерење времена, дужине, запремина судова који садрже течност.

Дужина изломљених линија, површина квадрата и правоугаоника, површина и запремина коцке и квадра. (Изгледа да је овај садржај сасвим близак ономе из Националног курикулума за Енглеску, [11]).

Размишљајући о нијансама разраде овог садржаја, налазимо теоријски оквир који ће усмерити наше поступке према идејама Фројденталове дидактичке феноменологије.

1. Следимо Фројдентала

Речи означавају појмове али им њима одговарајући примери дају смисао. Увек се узима да појам буде вишег степена апстрактности него њему одговарајући примери. Најмање апстрактни су они појмови чији сви примери су објекти који се могу опазити у реалном свету. Ако су сви примери који се односе на неки појам уочљиви феномени који постоје у стварном свету, за такав се појам каже да је на *опажајном нивоу.*

Експлицитна идеја геометријског простора није била развијена у периоду класичне грчке геометрије. Од времена Декарта координатни простори су коришћени у проучавању геометријских објеката и, почев од краја 19-ог века, почео је процес познат као геометризација математике. Даље су, временом, разне идеје апстрактних простора уведене у математику, често са улогом прихватилишта за класу објеката који се разматрају. Помињући све ове чињенице, настојимо да учинимо уочљивим ситуације у којима се појмови и њихови системи односе на класе одговарајућих примера. Класа примера који се односе на појмове неког система звећемо *наглашавајућа феноменологија* тог система. Инспирацију за коришћење овог термина нашли смо у Томовим општим погледима [19]:

> „Свака наука је проучавање једне феноменологије ... , свака феноменологија се може посматрати као визуелни призор.“

Примери за наглашавајућу феноменологију (визуелне призоре) унутар домена овог чланка биће:

- сва чврста тела која постоје у стварном простору,
- иконичке репрезентације које постоје у сликаном окружењу, узетог као прихватилиште за све наше графичке кодификације.

Ови примери ће одредити два нивоа интуитивне геометрије: случајеве инхерентне и визуелне геометрије, респективно. (Детаљи следе у другом делу овог чланка).

Пре свега, мора се рећи да је Фројденталова дидактичка феноменологија грана дидактике математике, како је приказује његова књига [9]. Подразумевајући је као специфичан план за наставу и учење математике, и уз извесну слободу личне интерпретације, могли бисмо рећи да је дидактичка феноменологија процес структурисања садржаја с једне стране и прикупљања значајних информација посматрањем наглашавајуће феноменологије с друге стране, што затим чини оквир за повезивање појмова с њима одговарајућим појавама. Кад кажемо да су појаве уочене, то значи да оне директно пројектују своја значења. У случајевима који су у вези с овим чланком, такве појаве ће бити призори у спољашњем простору и иконичке репрезентације. Напоменимо да се у последњем случају претпоставља да деца спонтано уче функцију таквих репрезентација. (У напреднијим случајевима појаве могу бити саме апстрактне конструкције, на пример неке класе подскупова у координатним просторима итд. Зависно од система појмова који се конструише, претпоставља се да су такве појаве, без обзира колико апстрактне могу бити, представљене у свести ученика). Надаље, појмови и њихови системи се уче постепено, пролазећи кроз неколико нивоа апстрактности. Да бисмо изразили овај континуални процес изградње појмова, употребили смо глаголску именицу „структурисање“ у горњој формулацији дидактиаке феноменологије.

2. Учимо од Поенкареа

Широко је прихваћено уверење да су основне геометријске чињенице очигледне и експериментално проверљиве. Такво погрешно мишљење резултат је бркања апстрактних геометријских идеја са моделима и иконичким знаковима који их представљају. То не значи, наравно, да се геометријске идеје не односе на појаве које постоје у реалном свету. Сасвим супротно, људи их креирају у својој свести бивајући стално у контакту с окружујућом реалношћу. Чињеница је коју треба нагласити да учење геометрије није процес који се одвија спонтано већ процес који мора бити пажљиво руковођен од стране наставника. Комбинован од опажања и иконичког представљања опаженог, као и вербалног изражавања обеју активности, процес се развија успешно само ако је његов механизам добро контролисан. Посебно је важно да вербални начин изражавања прави оштру разлику између ствари које се могу опазити и апстрактних појмова геометрије. Таква вешта употреба језика од стране наставника ће, затим, бити лако прихваћена од деце. Због тога је суштинска страна овог процеса учења разумевање начина на које геометријски појмови настају и представљају се у човековој свести. Сматрамо да би дубока философска разматрања великог класичног математичара Анри Поенкареа (Henri Poincaré, 1854–1912) која се односе на човеково искуство и заснивање геометрије могла имати суштинске дидактичке импликације. Његове дубоке мисли ове врсте изложене су у његовој књизи *La Science et l'Hypothèse*, [17]. Та књига је на веома високом нивоу, и због тога није врста материјала који бисмо препоручили наставницима или дидактичарима. Па ипак, цитирање неких редова изабраних из те књиге и употпуњених нашом интерпретацијом и намерним поједностављењима могло би послужити као врста замене намењене ширем кругу читалаца.

Тако, на пример, сумирајући нека од својих разматрања, Поенкаре пише:

> „... принципи геометрије нису експерименталне чињенице и посебно Еуклидов пети постулат се не може експериментално доказати.“

Интерпретирајући, рецимо да су геометријски објекти апстрактни и стога производи човековог ума који се не могу идентификовати са материјалним објектима реалног света. Нити се претпостављени односи између таквих објеката могу експериментално проверавати помоћу такве материјализације. Најчувенија таква претпоставка је Еуклидов пети постулат: *Нека је дата права и тачка ван ње. Онда постоји једна и само једна права кроз дату тачку која је паралелна датој правој.*

Столећима су математичари узалудно покушавали да докажу Еуклидов пети постулат, што значи да га изведу из осталих постулата који су прихваћени у еуклидској геометрији. Када је Н. И. Лобачевски (Н. И. Лобачевский, 1793–1856) претпоставио да *постоји бесконачно много паралела кроз задату тачку ван праве*, изградивши тако геометрију која је једнако конзистентна као што је еуклидска, постало је очигледно да је доказ петог постулата у принципу немогућ. А касније, када је Г. Ф. Риман (G. F. Riemann, 1826–1866) направио другу претпоставку *да се сваке две праве секу*, изградивши тако конзистентну геометрију без паралелности, ова дуготрајна дискусија о паралелним правим је коначно закључена.

Једна визуализација Риманове равни је сфера на којој је најкраћи пут између двеју њених тачака лук велике кружнице сфере која спаја те тачке. Тако је сфера са великим кружницама узетим за праве (формално се оне зову геодезијске линије) модел Риманове равни.

Оживљавајући ову геометријску ситуацију могли бисмо рећи да би имагинарна, интелигентна бића која никад не би напустила површ сфере, прихватила да је Риманова геометрија за њих најповољнија. Будући да ми живимо на мало храпавој површи Земљине лопте и простору који је окружује, локално ми меримо растојања између два места замишљајући их као две тачке повезане Еуклидовим сегментом праве, али глобално, кад су места на већем растојању, ми меримо дужину велике кружнице на површи Земље која их спаја. Иако су ове интерпретације једноставне, оне показују да за схватање реалности може бити корисно да се употреби један или други систем геометрије.

Можемо као примере ниског нивоа разумевања природе геометрије навести „објашњења" типа „шта би се десило ако ... " с којима се често срећемо у школским књигама из геометрије. Неки примери таквих погодбених реченица су: Ако би наш прибор за цртање био идеално прецизан ... , Ако би се права линија бесконачно продужила ... , Ако би линија која је нацртана постајала све тања и тања ... , итд. У ствари, праве линије су објекти који се простиру неограничено и стога, оне се не могу ни скратити ни продужити. Али оно што може су нацртане дужи које их представљају. Ово је типичан пример бркања појмова са њиховим иконичким репрезентацијама. А као што смо видели, Еуклидов пети постулат је логичка претпоставка независна од искуства; стога не може постојати никакав идеално прецизан прибор који би био употребљен да се он демонстрира. Нема оправдања за „објашњења" ове врсте која ометају нормалан процес учења. Као реликти застарелих педагошких импровизација, она треба да буду протерана из уџбеника.

Дубока Поенкареова анализа процеса који воде до формирања геометријских идеја заснована је на перцепцији чврстих тела која постоје у физичком окружењу. Тако, он разликује геометријски простор од простора сазданог од наших представа, с његова три облика: визуелном, тактилном и моторичком, сматрајући да је овај други искривљена слика првог. Према његовој анализи, крута тела и њихова померања не могу се представити у геометријском простору али их ми третирамо као да јесу смештени у том простору. На тај начин он претпоставља претходно постојање геометријског простора као основне когнитивне категорије која је у функцији интерпретације чулних доживљаја.

Несумњиво је да Поенкареова анализа порекла геометрије није лака за директно прихватање. Али, уверени смо да би њено превођење на језик дидактике и утапање у наставне ситуације много допринело обради школске геометрије.

Користићемо се сада Поенкареовим погледима, израженим у редовима који следе, да бисмо формулисали једноставан дидактички принцип.

> „Математичари не проучавају објекте, него односе међу објектима ... "
>
> „Материјал им није важан, интересује их само облик ... "

„Ако, дакле, не би било крутих тела у природи, не би било ни геометрије.“

Пре свега, морамо разумети да формирање геометријских идеја почиње са перцепцијом чврстих тела у спољашњем простору. Према гешталт психологији, перцепција је неодвојива од интерпретације а интерпретација се такође посматра као облик мишљења и апстракције. Дословно узето, апстракција је поступак издвајања битних својстава. Али, у случају формирања основних појмова (бројеви, облици, итд.), много је лакше (или једино могуће) указати на она својства која су небитна и помоћу таквог поступка игнорисања (заборављања) таквих својстава, суштина ће преостати (без експлицитног указивања шта је то).

Ослањајући се на горње Поенкареове погледе, сада можемо формулисати следећи дидактички принцип:

Прихватајући чврсто тело A на такав начин да се игноришу сва његова физичка својства, преостаје чиста идеја геометријског објекта $\overline{A}$.

Ову формулацију процеса који води од посматрања чврстих тела до њихове геометријске перцепције (и схватања) зовемо *Принцип формирања геометријских идеја.* Функција горње црте је да симболизује апстраховање (или, боље рећи, занемаривање) свих физичких својстава објекта A.

Два објекта A_1 и A_2 могу бити различита (имати различита физичка својства или различите положаје у спољашњем простору) а два утиска у свести $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ бити ипак једнака. За такве објекте се каже да имају исти облик и величину. У геометријском простору се објекти који им одговарају зову конгруентни. Конгруенција двају геометријских објеката се често интуитивно описује као могућност њиховог поклапања када се један од њих „помери“ у положај другог. Такво померање, које постоји у нашој имагинацији, јесте имитација премештања чврстих тела у спољашњем простору. Наиме, када се чврсто тело премести у спољашњем простору, његов се положај мења али оно остаје идентично себи. Конгруенција је основна геометријска релација, будући да су сва својства два конгруентна (геометријска) објекта иста а оно што их чини различитим је њихов положај у простору. Коришћење идеје геометријског простора ка прихватилишта за геометријске објекте било би сувише компликована апстракција на овом нивоу разматрања. Уместо њега, ми се користимо иконичком репрезентацијом таквих објеката, узимајући их смештеним у сликано окружење.

Напоменимо да је спонтано значење појма „облик“ доста нејасно и када се математички утврди, води до различитих морфолошких типова. Додајмо исто тако да је у нашем чланку [16] ова ствар разматрана на начин који је прихватљив за шири круг читалаца. Исто тако, спонтани појам величине је доста неодређен и кад се математички формализује, води до различитих врста мера: дужина, површина, запремина, итд.

Нису сви облици посебно занимљиви. Међутим, неки објекти имају веома карактеристичан облик што их, заједно с могућностима њихове употребе у човековим активностима, издваја као посебно значајне. Перцепција таквих објеката и разрада одговарајућих чулних доживљаја спајају се у специфичан тип који има стабилну менталну репрезентацију и означава се специфичном речју у домену језика. И то је начин на који се у свести креирају спонтани геометријски појмови и изражавају вербално.

Коначно, говорећи о претходним искуствима, Поенкаре каже:

> „ ... природном селекцијом се наш дух прилагодио условима спољашњег света, прихватио је геометрију најприкладнију за простор; другим речима најудобнију.“
>
> „ ... геометрија није стварна, она је корисна.“

Размишљајући о дидактичким импликацијама ових погледа, сматрамо да наставници, специјално они у млађим разредима основне школе, треба да разумеју геометрију на шири начин од оног из перспективе геометријских курсева које су имали у школи. Одабране теме из историје математике могле би заиста допринети таквом разумевању. Од посебног интереса могло би бити упознавање с активностима наших примитивних предака, који су показали високе уметничке способности да праве предмете различитих облика и за различите потребе. А суштинска компонента тих способности била је њихова геометријска имагинација, која је усмеравала такве њихове активности. Њихове геометријске идеје биле су својствене (срасле) објектима које су правили и таква ситуација с геометријом је присутна и у периоду преисторијских цивилизација (Исток и Средњи исток, Стари Египат). Такво широко разумевање почетака геометрије помаже наставнику да потпуније разуме онтогенетички развој, као и да уважава овај вид знања као важно наслеђе људске врсте, које нам помаже да с разумевањем сазнајемо свет који нас окружује.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerdes, Paulus, P. J., *On Ethnomathematical Research and Symmetry*, Symmetry: Culture and Science, **1**, 2 (1990), 154–170.
2. Pixten, R., *Towards a Navajo Indian Geometry*, Communication and Cognition, Ghent (Belgium).
3. Sabato, Ernesto, *Uno y el Universo*, Seix Barral, 1982.
4. Barabash, M., *Synthetic Euclidean geometry as a didactic basis for primary and secondary school geometry*, `http://www.icme-organizers.dk/dg06/`, pp. 1–12.
5. Barrantes, M. and Blanco, L. J., *A Study of Prospective Primary Teachers' Conceptions of Teaching and Learning School Geometry*, Journal of Mathematics Teacher Education (2006) **9**: 411–436.
6. Bkouche, R., *La géométrie dans le première années de la revue L'Enseignement Mathématique*, One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique, edited by D. Coray, F. Furtinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson and G. Schubring, L'Enseigment Mathématique, Genève, 2003, pp. 96–112.
7. Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, 1973.
8. Freudenthal, H., *Weeding and Sowing*, D. Reidel Publishing Company, 1978.
9. Freudenthal, H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Publishing Company, 1983.
10. Howson, G., *Geometry: 1950–1970*, loc. cit. (One Hundred Years of ...), pp. 113–131.

11. Jones, K. and Mooney, C., *Making space for geometry in primary mathematics*, In: I. Thompson (Ed.), *Enhancing Primary Mathematics Teaching*, London, Open University Press, pp. 3–15.
12. Kuzniak, A. and Rauscher, J.-C., *On the Geometrical Thinking of Pre-Service School Teachers*, Proc. Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Marianna Bosch (Ed.)
13. Laborde, C., *Géométrie – periode 2000 et après*, loc. cit. (One Hundred Years of ...), pp. 133–154.
14. Марјановић, М. М., *Игре изједначавања*, Завод за уџбенике, Београд, 2001.
15. Marjanović, M. M. and Kadijevich, Dj., *Identification Games in Early Mathematical Education*, EduMath, 2001, **12**, 26–34.
16. Marjanović, M. M., *Metric Euclidean Projective and Topological Properties*, The Teaching of Mathematics, 2001, vol. IV, 1, pp. 41–70.
17. Poincaré, H., *La Science et l'Hypothèse*, Ernest Flammarion, 1927.
18. Rouche, N., *Reaction*, loc. cit. (One Hundred Years of ...), pp. 156–159.
19. Thom, R., *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, Union general d'éditions, 1974.
20. van Hiele, P. M., *Structure and Insight*, Academic Press, 1985.

Математички институт САНУ, Кнеза Михаила 35/IV, Београд

E-mail: `milomar@beotel.yu`