Мр Златко Удовичић

ПРВА ЛЕКЦИЈА О ТАЛАСИЋИМА

Рад пред вама је незнатно измењени уводни део магистарске тезе [7], коју је аутор одбранио на Математичком факултету у Београду 2005. године. Као што наслов (директно инспирисан насловом класичне монографије [2]) сугерише, циљ рада је упознавање читаоца са основним појмовима и идејама теорије таласића. Више о овој области савремене хармонијске анализе заинтересовани читалац може пронаћи у некој од књига са списка препоручене литературе.

1. Увод

Иако је термин „таласић“ (енгл. wavelet) први пут употребљен тек осамдесетих година XX века, теорија таласића има много дубље корене. Наиме, на самом почетку XIX века, Joseph Fourier је доказао да се свака интеграбилна, 2π-периодична функција може представити као сума тригонометријског реда

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Стотинак година касније, 1909. године, у својој докторској дисертацији Alfred Haar је посматрао проблем развоја интеграбилних функција по неком другом ортонормираном систему функција. Као основну функцију узео је функцију $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дефинисану са

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

и доказао да се свака интеграбилна функција може са произвољном тачношћу апроксимирати линеарном комбинацијом функција $\psi_{j,k}(\cdot) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}\cdot - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$. Полазећи од чињенице да се свака интеграбилна функција може са произвољном тачношћу апроксимирати део по део константном (на мрежи густине 2^{-n}, за довољно велико $n \in \mathbf{N}$) функцијом, Haar је сваку такву (део по део константну) функцију развио по систему функција $\psi_{j,k}(\cdot)$. Кроз анализу доказа те чињенице могу се на једноставан начин истаћи основне идеје мултирезолуцијске анализе, па се због тога у даљем тексту даје скица овог доказа.

Дакле, нека је на мрежи густине 2^{-J}, $J \in \mathbf{Z}$, својим вредностима[1] f_l^{-J}, $l \in \mathbf{Z}$, задана део по део константна функција $f^{-J}(\cdot)$. Функција $f^{-J}(\cdot)$ апроксимира се функцијом $f^{-J+1}(\cdot)$, део по део константном на интервалима $\left[\dfrac{l}{2^{J-1}}, \dfrac{l+1}{2^{J-1}}\right)$, $l \in \mathbf{Z}$, дефинисаном са $f_l^{-J+1} = \dfrac{1}{2}(f_{2l}^{-J} + f_{2l+1}^{-J})$, (функција $f^{-J}(\cdot)$ се на интервалу $\left[\dfrac{l}{2^{J-1}}, \dfrac{l+1}{2^{J-1}}\right)$ апроксимира својом средњом вредношћу на том интервалу), док је грешка апроксимације једнака:

$$\delta_{2l}^{-J+1} = f_{2l}^{-J} - f_l^{-J+1} = \frac{1}{2}(f_{2l}^{-J} - f_{2l+1}^{-J}),$$
$$\delta_{2l+1}^{-J+1} = f_{2l+1}^{-J} - f_l^{-J+1} = \frac{1}{2}(f_{2l+1}^{-J} - f_{2l}^{-J}) = -\delta_{2l}^{-J+1}.$$

Одавде се закључује да је

$$f^{-J}(x) = f^{-J+1}(x) + \delta^{-J+1}(x),$$

при чему је

$$\delta^{-J+1}(x) = 2^{\frac{-J+1}{2}} \sum_l \delta_{2l}^{-J+1} \psi_{-J+1,l}(x).$$

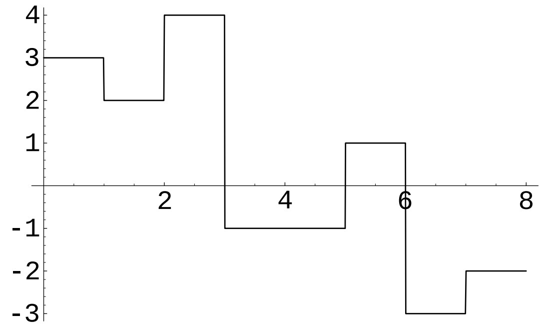
Наведени део доказа садржи основну идеју мултирезолуције. Наиме, део по део константна функција задана својим вредностима на мрежи одређене густине (ниво са финијом резолуцијом) апроксимира се део по део константном функцијом на мрежи са двоструко мањом густином (ниво са грубљом резолуцијом), док се „изгубљени детаљи“ изражавају као линеарне комбинације базних функција. Даље се описани поступак примењује на функцију f^{-J+1}, па на функцију f^{-J+2}, ... Дакле,

$$\begin{aligned} f^{-J}(x) &= f^{-J+2}(x) + \sum_{k=1}^{2} \sum_l 2^{\frac{-J+k}{2}} \psi_{-J+k,l}(x) \delta_{2l}^{-J+k} \\ &= \cdots = \sum_k \sum_l 2^{\frac{-J+k}{2}} \psi_{-J+k,l}(x) \delta_{2l}^{-J+k}. \end{aligned}$$

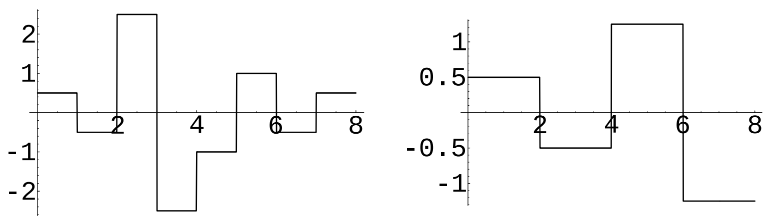
Даље следи пример реализације описаног алгоритма за део по део константну функцију са вредностима $(3, 2, 4, -1, -1, 1, -3, -2)$. Наравно, у практичној реализацији, функција задана својим вредностима у простору са најфинијом резолуцијом (означеном на слици са v_0) изражава се као збир апроксимације у простору са најгрубљом резолуцијом (на слици v_3) и детаља у просторима на свим нивоима резолуције (на слици w_3, w_2, w_1).

На следећи велики корак у развоју теорије таласића чекало се око осамдесет година. Крајем 80-их година XX века, Ingrid Daubechies је дала генерализацију Haar-ове тезе. Daubechies је успела да за свако $r \in \mathbf{Z}$ конструише ортонормирану

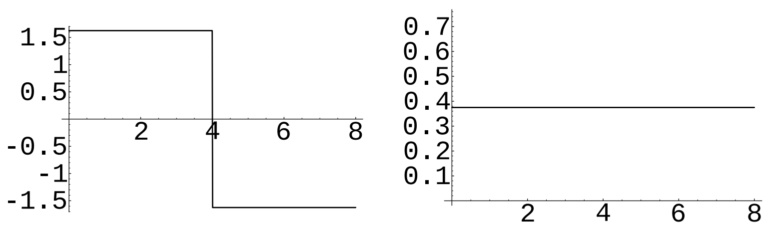
[1] Једноставности ради, за $x \in \left[\dfrac{l}{2^j}, \dfrac{l+1}{2^j}\right)$, $l, j \in \mathbf{Z}$, уместо $f^{-j}(x)$ користиће се ознака f_l^{-j}.



Простор v_0



Простори w_1 и w_2



Простори w_3 и v_3

базу простора $L_2(\mathbf{R})$ (функције $\psi_{j,k}(\cdot) = 2^{-j/2}\psi_r(2^{-j}\cdot - k)$, $j,k \in \mathbf{Z}$) са основном функцијом $\psi_r(\cdot)$ која има следеће особине:

1. компактан носач (интервал $[0, 2r-1]$),
2. $\int_{\mathbf{R}} \psi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} x\psi(x)\,dx = \cdots = \int_{\mathbf{R}} x^{r-1}\psi(x)\,dx = 0$ и
3. приближно $\dfrac{r}{5}$ непрекидних извода.

Наведене особине оправдавају термин „таласић“. Њихова осцилаторна природа (базне функције су транслације одређене функције) намеће термин талас, док је деминутив употребљен због ограничености њиховог домена (компактан носач).

2. Мултирезолуцијска анализа

Дефиниција 1. Мултирезолуцијска анализа је разбијање простора $L_2(\mathbf{R})$ на низ затворених потпростора v_j, $j \in \mathbf{Z}$, (тзв. апроксимационих простора) са следећим особинама:

1. $\{0\} \subseteq \cdots \subseteq v_2 \subseteq v_1 \subseteq v_0 \subseteq v_{-1} \subseteq \cdots \subseteq L_2(\mathbf{R})$,
2. $\bigcap_{k\in\mathbf{Z}} v_k = \{0\}$ и $\mathrm{cl}(\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} v_k) = L_2(\mathbf{R})$,
3. $(\forall k \in \mathbf{Z})(f(\cdot) \in v_k \Leftrightarrow f(2\cdot) \in v_{k-1})$,
4. $f(\cdot) \in v_0 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbf{Z}) f(\cdot - k) \in v_0$ и
5. постоји функција $\varphi(\cdot) \in v_0$ (тзв. функција скалирања) таква да је скуп $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирана база простора v_0.

Лема 1. *Ако је скуп функција* $\{\,\varphi(\cdot - k) \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$ *ортонормирана база простора* v_0*, онда је сваки од скупова* $\{\,\varphi_{j,k}(\cdot) \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$ *ортонормирана база простора* v_j*,* $j \in \mathbf{Z}$*, где је* $\varphi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x - k)$.

Доказ. Нека је $f(\cdot) \in v_j$ произвољна функција. Индуктивно се закључује да је тада $f(2^j\cdot) \in v_0$, па је

$$(\forall x \in \mathbf{R})\, f(2^j x) = \sum_n c_n \varphi(x - n),$$

јер је $\{\,\varphi(\cdot - k) \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$ (ортонормирана) база простора v_0. Будући да је

$$(\forall x \in \mathbf{R})\, f(x) = f\left(2^j \frac{x}{2^j}\right) = \sum_n c_n \varphi(2^{-j}x - n),$$

скуп $\{\,\varphi(2^{-j}\cdot - k) \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$ је заиста база простора v_j. Даље је

$$\begin{aligned}(\varphi(2^{-j}\cdot - m), \varphi(2^{-j}\cdot - n)) &= \int_{\mathbf{R}} \varphi(2^{-j}x - m)\varphi(2^{-j}x - n)\, dx \\ &= 2^j \int_{\mathbf{R}} \varphi(t - m)\varphi(t - n)\, dx = 2^j \delta(m - n),\end{aligned}$$

где је $\delta(\cdot)$ Кронекеров делта симбол, па је база $\{\,\varphi_{j,k}(\cdot) \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$ ортогонална. Коначно, због $\|\varphi(2^{-j}\cdot - n)\| = 2^{j/2}$, $n \in \mathbf{Z}$, база $\{\,\varphi_{j,k}(\cdot) \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$ је и нормирана. ∎

Лема 2. *Сваки од простора* v_j*,* $j \in \mathbf{Z}$ *је инваријантан у односу на транслације, тј.* $f(\cdot) \in v_j \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbf{Z})\, f(\cdot - k) \in v_j$*,* $j \in \mathbf{Z}$.

Доказ. За произвољну функцију $f(\cdot) \in L_2(\mathbf{R})$ важи

$$\begin{aligned} f(\cdot) \in v_j &\iff f(2^j\cdot) \in v_0 \iff (\forall k \in \mathbf{Z})\, f(2^j \cdot - k) \in v_0 \\ &\iff (\forall k \in \mathbf{Z})\, f(\cdot - \frac{k}{2^j}) \in v_j. \end{aligned}$$

Дакле, за произвољно $k \in \mathbf{Z}$ важи

$$f(\cdot) \in v_j \iff f(\cdot - k) = f(\cdot - \frac{2^j k}{2^j}) \in v_j, \tag{1}$$

што је и требало доказати. ∎

Из чињенице $v_0 \subseteq v_{-1}$ следи да је $\varphi(\cdot) = \varphi_{0,0}(\cdot) \in v_{-1}$, па се према леми 1 функција скалирања може представити као линеарна комбинација функција $\varphi_{-1,k}(\cdot)$. Другим речима, функција скалирања задовољава тзв. дилатациону једначину

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k \varphi_{-1,k}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k \varphi(2x-k). \tag{2}$$

Ако једначина (2) има једно решење, онда она има бесконачно много решења (ако је $\varphi(\cdot)$ решење једначине (2), онда је и $c\cdot\varphi(\cdot)$, $c\in\mathbf{R}$, такође њено решење). Одређености ради, обично се захтева да функција скалирања задовољава услов

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = 1,$$

одакле непосредно следи да коефицијенти једначине (2) морају задовољавати услов

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k = \sqrt{2}.$$

Пример 1. Основни пример мултирезолуцијске анализе (тзв. Haar-ова мултирезолуцијска анализа) јесу простори део по део константних функција. Функција скалирања је карактеристична функција интервала $[0,1)$, (у даљем тексту бокс функција) тј. $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1), \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, а апроксимациони простори су дефинисани са $v_{-j} = \{\, f(\cdot) \mid (\forall k\in\mathbf{Z})\, x\in[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) \Rightarrow f(x) = f(2^{-j}k)\,\}$, $j\in\mathbf{Z}$.

3. Каскадни алгоритам

Каскадним алгоритмом рекурзивно се дефинише низ функција који, уколико конвергира, конвергира ка решењу једначине (2). Почетна апроксимација је обично (али не обавезно) бокс функција, а даље апроксимације се дефинишу са

$$\varphi^{(i+1)}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k \varphi^{(i)}(2x-k), \quad i\ge 0.$$

Лема 3. *Ако су $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ коефицијенти једначине* (2) *и ако низ функција генерисан каскадним алгоритмом конвергира, при чему почетна апроксимација има компактан носач, онда је носач граничне функције интервал* $[0, N-1]$.

Доказ. Нека је носач почетне апроксимације у каскадном алгоритму (произвољни) интервал $[a,b]$. Тада је

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{2}\sum_{k} f_k \varphi^{(0)}(2x-k),$$

па је

$$\operatorname{supp}\varphi^{(1)}(x) = \bigcup_{k=0}^{N-1}\Big[\frac{a+k}{2}, \frac{b+k}{2}\Big] = \Big[\frac{a}{2}, \frac{b+N-1}{2}\Big].$$

Следећим кораком каскадног алгоритма се добија

$$\varphi^{(2)} = \sqrt{2}\sum_k f_k \varphi^{(1)}(2x-k),$$

одакле се закључује да је

$$\operatorname{supp}\varphi^{(2)}(x) = \bigcup_{k=0}^{N-1}\Big[\frac{a+2k}{4}, \frac{b+N-1+2k}{4}\Big] = \Big[\frac{a}{4}, \frac{b+3(N-1)}{4}\Big].$$

Индуктивно се закључује да је

$$\operatorname{supp}\varphi^{(n)}(x) = \Big[\frac{a}{2^n}, \frac{b+(2^n-1)(N-1)}{2^n}\Big] \to [0, N-1], n\to\infty. \quad \blacksquare$$

Теорема 1. *Нека су* $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ *коефицијенти једначине* (2) *и нека низ функција генерисан каскадним алгоритмом конвергира, при чему је почетна апроксимација бокс функција. Потребан и довољан услов да скуп* $\{\,\varphi(\cdot - k) \mid k\in\mathbf{Z}\,\}$ *буде ортонормиран јесте да коефицијенти једначине* (2) *задовољавају услов*

$$(\forall m\in\mathbf{Z})\ \sum_k f_k f_{k-2m} = \delta(m). \tag{3}$$

Доказ. Нека је скуп $\{\,\varphi(\cdot - k) \mid k\in\mathbf{Z}\,\}$ ортонормиран и нека је $m\in\mathbf{Z}$ произвољно. Тада је

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}}\varphi(x)\varphi(x-m)\,dx &= \int_{\mathbf{R}}\Big(\sqrt{2}\sum_k f_k\varphi(2x-k)\Big)\cdot\Big(\sqrt{2}\sum_l f_l\varphi(2x-2m-l)\Big)\,dx\\ &= 2\sum_k\sum_l f_k f_l\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-k)\varphi(2x-2m-l)\,dx\\ &= \sum_k\sum_l f_k f_l\int_{\mathbf{R}}\varphi(t-k)\varphi(t-2m-l)\,dt\\ &= \sum_k\sum_l f_k f_l\delta(k-2m-l) = \sum_k f_k f_{k-2m}.\end{aligned}$$

Дакле,

$$\delta(m) = \int_{\mathbf{R}}\varphi(x)\varphi(x-m)\,dx = \sum_k f_k f_{k-2m},$$

чиме је доказано да је услов (3) потребан за ортонормираност скупа $\{\,\varphi(\cdot - k) \mid k\in\mathbf{Z}\,\}$.

Обратно, нека је сада $(\forall m\in\mathbf{Z})\ \sum_k f_k f_{k-2m} = \delta(m)$ и нека низ функција генерисан каскадним алгоритмом, при чему је почетна апроксимација бокс функција, конвергира. Доказ да је скуп $\{\,\varphi(\cdot - k) \mid k\in\mathbf{Z}\,\}$ ортонормиран изводи се индукцијом по броју итерације i.

За $i = 0$ тврђење је очигледно јер су бокс функције ортогоналне на своје транслације.

Ако је $\int_{\mathbf{R}} \varphi^{(j)}(x-m)\varphi^{(j)}(x-n)\,dx = \delta(m-n)$, за све $j \le i-1$, онда је

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}} \varphi^{(i)}(x-m)\varphi^{(i)}(x-n)\,dx = \\
&= \int_{\mathbf{R}} \Big(\sqrt{2}\sum_k f_k \varphi^{(i-1)}(2x-2m-k)\Big)\Big(\sqrt{2}\sum_l f_l \varphi^{(i-1)}(2x-2n-l)\Big)\,dx \\
&= 2\sum_k \sum_l f_k f_l \int_{\mathbf{R}} \varphi^{(i-1)}(2x-2m-k)\varphi^{(i-1)}(2x-2n-l)\,dx \\
&= \sum_k \sum_l f_k f_l \int_{\mathbf{R}} \varphi^{(i-1)}(t-2m-k)\varphi^{(i-1)}(t-2n-l)\,dt \\
&= \sum_k \sum_l f_k f_l \delta(2m+k-2n-l) = \sum_k f_k f_{k-2(m-n)} = \delta(m-n).
\end{aligned}$$

Будући да каскадни алгоритам конвергира, скуп $\{\,\varphi(\cdot - k) \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$, где је $\varphi(\cdot) = \lim_{i\to\infty} \varphi^{(i)}(\cdot)$, такође је ортонормиран, што у потпуности доказује тврђење. ■

Напомена 1. Уколико $k \notin \{0, 1, \ldots, N-1\}$, онда је у свакој од горњих сума $f_k = 0$.

Напомена 2. Није се тешко уверити да непаран број коефицијената једначине (2) не може задовољавати услов (3).

4. Простори таласића

Простори таласића, у ознаци w_k, јесу ортогонални комплементи простора v_k у односу на просторе v_{k-1}. Дакле,

$$v_{j-1} = v_j \dot{+} w_j.$$

Као и у случају апроксимационих простора, и за просторе таласића постоји функција $\psi(\cdot)$ (тзв. таласић мајка) таква да је фамилија $\{\,\psi_{j,k}(\cdot) \mid j,k \in \mathbf{Z}\,\}$ ортонормирана база простора w_k, где је $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-k)$. Из чињенице $w_0 \subseteq v_{-1}$ следи да је $\psi(\cdot) = \psi_{0,0}(\cdot) \in v_{-1}$, па се таласић мајка може представити као линеарна комбинација функција $\varphi_{-1,k}(\cdot)$, односно таласић мајка задовољава тзв. једначину таласића

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} p_k \varphi_{-1,k}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} p_k \varphi(2x-k). \tag{4}$$

Лема 4. *Нека су задани бројеви $f_0, f_1, \ldots, f_{2N-1}$ који задовољавају услов* (3) *и нека је*

$$p_k = (-1)^k f_{2N-1-k}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 2N-1\}. \tag{5}$$

Тада је $(\forall m \in \mathbf{Z})\Big(\sum_k p_k p_{k-2m} = \delta(m)$ *и* $\sum_k f_k p_{k-2m} = 0\Big)$.

Доказ. Нека је $m \in \mathbf{Z}$ произвољно. Тада је

$$\sum_k p_k p_{k-2m} = \sum_k (-1)^k f_{2N-1-k} (-1)^{k-2m} f_{2N-1-k+2m}$$
$$= \sum_l f_l f_{l+2m} = \delta(m),$$

чиме је доказана прва једнакост.

Даље, ако је $S = \sum_k f_k p_{k-2m}$, онда је

$$\begin{aligned} S &= \sum_k f_k p_{k-2m} = \sum_k (-1)^{k-2m} f_k f_{2N-1-k+2m} \\ &= \sum_l (-1)^{2N-1-l} f_{2N-1-(l-2m)} f_l = \sum_l (-1)(-1)^{l-2m} f_{2N-1-(l-2m)} f_l \\ &= -\sum_l p_{l-2m} f_l = -S, \end{aligned}$$

одакле се закључује да је $S = 0$, чиме је и друга једнакост доказана. ■

Теорема 2. *Нека су $f_0, f_1, \dots, f_{2N-1}$ коефицијенти једначине* (2), *нека каскадни алгоритам (у којем је почетна апроксимација бокс функција) конвергира ка функцији скалирања $\varphi(\cdot)$ и нека потпростори v_j, $j \in \mathbf{Z}$, генерисани скуповима $\{\, \varphi_{j,k}(\cdot) \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$ образују мултирезолуцијску анализу простора $L_2(\mathbf{R})$. Ако су бројеви $p_k = (-1)^k f_{2N-1-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2N-1\}$, коефицијенти једначине* (4), *онда је:*

$(\forall j, J \in \mathbf{Z})(\forall m, n \in \mathbf{Z})\, (\psi_{j,m}, \psi_{J,n}) = \delta(j-J)\delta(m-n)$ *и*

$(\forall j, J \in \mathbf{Z}, J \le j)(\forall m, n \in \mathbf{Z})\, (\varphi_{j,m}, \psi_{J,n}) = 0.$

Слободно говорећи, таласићи су међусобно ортогонални на свим нивоима резолуције и ортогонални су на све функције скалирања са грубљом резолуцијом.

Доказ. Скупови $\{\, \varphi_{j,k}(\cdot) \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$ су ортонормиране базе простора $v_j, \in \mathbf{Z}$, па према теореми 1 коефицијенти једначине (2) задовољавају услов (3), а према претходној леми, коефицијенти једначине (4) задовољавају услове $(\forall m \in \mathbf{Z}) \big(\sum_k p_k p_{k-2m} = \delta(m)$ и $\sum_k f_k p_{k-2m} = 0 \big)$.

За произвољне $m, n \in \mathbf{Z}$ важи:

$$\begin{aligned} &(\psi_{j,m}(\cdot), \psi_{j,n}(\cdot)) = \\ &\qquad \int_{\mathbf{R}} \Big(2^{-j/2} \sum_k p_k \varphi(2^{-j}x - 2m - k) \Big) \cdot \Big(2^{-j/2} \sum_l p_l \varphi(2^{-j}x - 2n - l) \Big)\, dx \\ &\qquad = 2^{-j} \sum_k \sum_l p_k p_l \int_{\mathbf{R}} \varphi(2^{-j}x - 2m - k) \cdot \varphi(2^{-j}x - 2n - l)\, dx \\ &\qquad = \sum_k \sum_l p_k p_l \delta(2m + k - 2n - l) = \sum_k \sum_l p_k p_{k+2(m-n)} = \delta(m-n). \end{aligned}$$

Даље, ако је нпр. $j > J$, онда је $v_j \subseteq v_{j-1} \subseteq \cdots \subseteq v_J$, па из чињеница $\psi_j(\cdot) \in v_J$, $\psi_J(\cdot) \in w_J$ и $v_J \perp w_J$ следи да је

$$(\forall m, n \in \mathbf{Z})\, \psi_{j,m}(\cdot) \perp \psi_{J,n}(\cdot),$$

што у потпуности доказује прву релацију.

Аналогно претходном доказу, за произвољне $m, n \in \mathbf{Z}$ важи:

$$\begin{aligned}
(\varphi_{j,m}(\cdot),&\psi_{j,n}(\cdot)) = \\
&\int_{\mathbf{R}} \Big(2^{-j/2} \sum_k f_k \varphi(2^{-j}x - 2m - k)\Big) \cdot \Big(2^{-j/2} \sum_l p_l \varphi(2^{-j}x - 2n - l)\Big)\, dx \\
&= 2^{-j} \sum_k \sum_l f_k p_l \int_{\mathbf{R}} \varphi(2^{-j}x - 2m - k) \cdot \varphi(2^{-j}x - 2n - l)\, dx \\
&= \sum_k \sum_l f_k p_l \delta(2m + k - 2n - l) = \sum_k \sum_l f_k p_{k+2(m-n)} = 0.
\end{aligned}$$

Ако је $J < j$, онда за произвољне $m, n \in \mathbf{Z}$ из чињеница $v_j \subseteq v_J$ и $v_J \perp w_J$ следи да је $v_j \perp w_J$, односно да је $\varphi_{j,m}(\cdot) \perp \psi_{J,n}(\cdot)$. Тиме је теорема у потпуности доказана. ∎

Напомена. Ако је $J > j$, онда је $v_J \dot{+} w_J \subseteq v_j$, па таласићи на нивоу са грубљом резолуцијом не могу бити ортогонални на функције скалирања на нивоу са финијом резолуцијом.

5. Апроксимација у просторима v_j и w_j, $j \in \mathbf{Z}$

Користећи дефиницију простора таласића добија се да је

$$v_{j-1} = v_j \dot{+} w_j = v_{j+1} \dot{+} w_{j+1} \dot{+} w_j = \cdots = v_J \dot{+} w_J \dot{+} w_{J-1} \dot{+} \ldots \dot{+} w_j.$$

Када $J \to \infty$, добија се да је

$$v_{j-1} = \bigoplus_{k=j}^{\infty} w_k,$$

а када $j \to -\infty$, добија се да је

$$L_2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} w_k.$$

У пракси је најзначајнија једнакост

$$v_{j-1} = v_J \dot{+} w_J \dot{+} w_{J-1} \dot{+} \ldots \dot{+} w_j$$

која омогућава репрезентацију функција из апроксимационог простора са најфинијом резолуцијом помоћу функције из апроксимационог простора са најгрубљом резолуцијом и функција из простора таласића са свим међурезолуцијама. Дакле, ако је $f_{j-1}(\cdot) \in v_{j-1}$, онда је

$$f_{j-1}(x) = f_J(x) + \sum_{k=j}^{J} \Delta f_k(x) = \sum_n a_{J,n}\varphi_{J,n}(x) + \sum_{k=j}^{J}\sum_n b_{k,n}\psi_{k,n}(x), \tag{6}$$

јер је $f_J(\cdot) \in v_J$ и $\Delta f_k(\cdot) \in w_k, k \in \{j, j+1, \dots, J\}$. Ортонормираност одговарајућих база омогућава израчунавање коефицијената репрезентације (6) по формулама

$$a_{J,n} = \int_{\mathbf{R}} f_{j-1}(x)\varphi_{J,n}(x)\,dx \quad \text{и} \quad b_{k,n} = \int_{\mathbf{R}} f_{j-1}(x)\psi_{k,n}(x)\,dx \tag{7}$$

6. Пирамидални алгоритам

Непостојање аналитичког облика како за функцију скалирања, тако и за таласић мајку, знатно отежава израчунавање интеграла (7). Директни пирамидални алгоритам је поступак израчунавања коефицијената $a_{j,k}$ и $b_{j,k}$ (коефицијенти на нивоу са грубљом резолуцијом) помоћу коефицијената $a_{j-1,k}$ (коефицијенти на нивоу са финијом резолуцијом) и коефицијената једначина (2) и (4). Инверзни пирамидални алгоритам је поступак израчунавања коефицијената $a_{j-1,k}$ помоћу коефицијената $a_{j,k}$ и $b_{j,k}$ и коефицијената једначина (2) и (4).

Теорема 3. *Нека је*

$$f_{j-1}(x) = \sum_n a_{j-1,n}\varphi_{j-1,n}(x) = \sum_k a_{j,k}\varphi_{j,k}(x) + \sum_k b_{j,k}\psi_{j,k}(x).$$

Коефицијенти апроксимације на нивоу са грубљом резолуцијом се, помоћу коефицијената на нивоу са финијом резолуцијом, рачунају по формулама

$$a_{j,k} = \sum_n f_{n-2k}a_{j-1,n} \quad \text{и} \quad b_{j,k} = \sum_n p_{n-2k}a_{j-1,n}. \tag{8}$$

С друге стране, коефицијенти апроксимације на нивоу са финијом резолуцијом се, помоћу коефицијената на нивоу са грубљом резолуцијом, рачунају по формулама

$$a_{j-1,k} = \sum_n (f_{k-2n}a_{j,n} + p_{k-2n}b_{j,n}). \tag{9}$$

Доказ. За произвољно $j \in \mathbf{Z}$ је

$$\begin{aligned}\varphi_{j,m}(t) &= 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}t - m) = 2^{(-j+1)/2}\sum_k f_k\varphi(2^{-j+1}t - 2m - k)\\ &= 2^{(-j+1)/2}\sum_n f_{n-2m}\varphi(2^{-j+1}t - n) = \sum_n f_{n-2m}\varphi_{j-1,n}(t).\end{aligned}$$

Аналогно се доказује да за произвољно $j \in \mathbf{Z}$ важи

$$\psi_{j,m}(t) = \sum_n p_{n-2m}\varphi_{j-1,n}(t).$$

Сада је

$$\begin{aligned} a_{j,k} = (f(\cdot), \varphi_{j,k}(\cdot)) &= \int_{\mathbf{R}} f(t)\varphi_{j,k}(t)\,dt = \int_{\mathbf{R}} f(t)\Big(\sum_n f_{n-2k}\varphi_{j-1,n}(t)\Big)\,dt \\ &= \sum_n f_{n-2k}\int_{\mathbf{R}} f(t)\varphi_{j-1,n}(t)\,dt = \sum_n f_{n-2k}\cdot a_{j-1,n}. \end{aligned}$$

Аналогно се доказује и друга од једнакости (8). Остаје још да се докаже једнакост (9). Дакле,

$$\begin{aligned} \sum_k a_{j-1,k}\varphi_{j-1,k}(t) &= \sum_k a_{j,k}\varphi_{j,k}(t) + \sum_k b_{j,k}\psi_{j,k}(t) \\ &= \sum_k a_{j,k}\sum_n f_{n-2k}\varphi_{j-1,n}(t) + \sum_k b_{j,k}\sum_n p_{n-2k}\varphi_{j-1,n}(t) \\ &= \sum_n \Big[\sum_k a_{j,k}f_{n-2k} + b_{j,k}p_{n-2k}\Big]\varphi_{j-1,n}(t), \end{aligned}$$

одакле непосредно следи тражена једнакост. ■

Дакле, у сваком кораку директног пирамидалног алгоритма (формуле (8)) се помоћу коефицијената $a_{j-1,k}$ добија двоструко мање коефицијената $a_{j,k}$ и двоструко мање коефицијената $b_{j,k}$, док се у сваком кораку инверзног пирамидалног алгоритма (формула (9)) помоћу коефицијената $a_{j,k}$ и $b_{j,k}$ добија двоструко више коефицијената $a_{j-1,k}$.

Оваква формулација пирамидалног алгоритма намеће два проблема приликом практичне реализације. Први је проблем избора почетне апроксимације (улазних коефицијената), док је други проблем продужења на граници. Теоретски, када су број улазних података и број корака пирамидалног алгоритма бесконачни, ови проблеми наравно не постоје.

Почетна апроксимација треба да довољно добро апроксимира задану функцију у простору са најфинијом резолуцијом, па је најчешћи (наравно, не и једини) избор низ вредности задане функције у тачкама довољно густе мреже.

Проблем продужења на граници најједноставније је објаснити на примеру. Дакле, нека су f_0, f_1, f_2, f_3 коефицијенти једначине (2), p_0, p_1, p_2, p_3 коефицијенти једначине (4) и нека су $a_{0,k}, k \in \{0, 1, \dots, 2^J - 1\}$ улазни коефицијенти пирамидалног алгоритма. Након $j-1$ корака, пирамидалним алгоритмом се добијају коефицијенти $a_{j-1,k}, k \in \{0, 1, \dots, 2^{J-j+1} - 1\}$ и $b_{j-1,k}, k \in \{0, 1, \dots, 2^{J-j+1} - 1\}$. Последње компоненте у следећем кораку се добијају по формули

$$a_{j,2^{J-j}-1} = f_0 a_{j-1,2^{J-j+1}-2} + f_1 a_{j-1,2^{J-j+1}-1} + f_2 a_{j-1,2^{J-j+1}} + f_3 a_{j-1,2^{J-j+1}+1}$$

и

$$b_{j,2^{J-j}-1} = p_0 a_{j-1,2^{J-j+1}-2} + p_1 a_{j-1,2^{J-j+1}-1} + p_2 a_{j-1,2^{J-j+1}} + p_3 a_{j-1,2^{J-j+1}+1}.$$

Проблем продужења на граници је проблем додељивања вредности коефицијентима $a_{j-1,2^{J-j+1}}$ и $a_{j-1,2^{J-j+1}+1}$ који нису израчунати у претходном кораку. Најчешће се овај низ коефицијената продужава на један од следећих начина: константом (обично нулом), периодично или симетрично. Треба напоменути да се на исти начин проблем продужења на граници јавља и у инверзном пирамидалном алгоритму.

Према претходно реченом, максималан број корака пирамидалног алгоритма је могуће реализовати ако је број почетних коефицијената степен броја 2. У том случају само један коефицијент у апроксимационом простору са најгрубљом резолуцијом представља функцију, док су преостале информације о функцији садржане у просторима таласића са различитим резолуцијама.

6.1. Израчунавање вредности функције скалирања и мајке таласића применом пирамидалног алгоритма

Применом пирамидалног алгоритма могуће је са произвољном тачношћу израчунати вредности функције скалирања и мајке таласића у диадским тачкама (тачкама облика $m2^{-K}$, где су $m, K \in \mathbf{Z}$). Пре свега, треба доказати да важи следећа

Лема 5. *Ако је $\varphi(\cdot) \in L_2(\mathbf{R})$ функција са компактним носачем садржаним у интервалу $[-R, R]$, таква да је $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = 1$, а функција $f(\cdot)$ непрекидна на скупу $\mathbf{R}$, онда је*

$$(\forall x \in \mathbf{R})\ \lim_{j\to\infty} 2^j \int_{\mathbf{R}} f(x+y)\varphi(2^j y)\,dy = f(x)$$

Доказ. Будући да је $2^n \int_{\mathbf{R}} \varphi(2^n x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\,dt = 1$, за произвољно $x \in \mathbf{R}$ важи

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - 2^n \int_{\mathbf{R}} f(x+y)\varphi(2^n y)\,dy \right| \\
&\qquad = \left| 2^n \int_{\mathbf{R}} [f(x) - f(x+y)]\,\varphi(2^n y)\,dy \right| = \left| \int_{\mathbf{R}} \left[f(x) - f(x+2^{-n}t)\right] \varphi(t)\,dt \right| \\
&\qquad \le \int_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|\,dx \cdot \sup_{|x+2^{-n}t|\le R} |f(x) - f(x+2^{-n}t)|.
\end{aligned}$$

Због непрекидности функције f,

$$\sup_{|x+2^{-n}t|\le R} |f(x) - f(x+2^{-n}t)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

чиме је тврђење доказано. ∎

Ако је $f(\cdot) \equiv \varphi(\cdot)$, при чему је $\varphi(\cdot)$ функција скалирања (уз претпоставку да је функција скалирања непрекидна), на основу претходне теореме, за $m, K \in \mathbf{Z}$ важи

$$\begin{aligned}
\varphi(m2^{-K}) &= \lim_{j\to\infty} 2^j \int_{\mathbf{R}} \varphi(m2^{-K}+y)\varphi(2^j y)\,dy = \lim_{j\to\infty} 2^j \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\varphi(2^j t - m2^{j-K})\,dt \\
&= \lim_{j\to\infty} 2^{j/2} \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\varphi_{-j,m2^{j-K}}(t)\,dt = \lim_{j\to\infty} 2^{j/2} a_{-j,m2^{j-K}},
\end{aligned}$$

па се, за довољно велико j може сматрати да је

$$\varphi(m2^{-K}) \approx 2^{j/2} a_{-j,m2^{j-K}},$$

где су $a_{-j,m2^{j-K}}$ коефицијенти апроксимације функције скалирања у простору v_j. Из претпоставке да је функција скалирања ортогонална на своје транслације, заједно са чињеницом $\varphi(\cdot) \in v_0$, за $j = 0$ се добија да је

$$a_{0,m2^{-K}} = (\varphi(\cdot), \varphi_{0,m2^{-K}}(\cdot)) = \delta(m2^{-K}) = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

Дакле, за приближно израчунавање вредности $\varphi(m2^{-K})$, $m, K \in \mathbf{Z}$, на мрежи густине 2^{-j}, $j \in \mathbf{Z}$, инверзни пирамидални алгоритам треба применити на скуп података $a_{0,k} = \delta(k), b_{0,k} = 0, k \in \{0, 1, \ldots, (2N-1)2^j - 1\}$ ($2N$ је број коефицијената једначине (2). Може се доказати да за приближно израчунавање вредности $\psi(m2^{-K})$, $m, K \in \mathbf{Z}$, на мрежи густине 2^{-j}, $j \in \mathbf{Z}$, инверзни пирамидални алгоритам треба применити на скуп података $a_{0,k} = 0, b_{0,k} = \delta(2^n), k \in \{0, 1, \ldots, (2N-1)2^j - 1\}$.

6.2. Матрична интерпретација пирамидалног алгоритма

Нека је матрица F дефинисана на следећи начин

$$F_{ij} = \begin{cases} f_{j-i}, & i \in 2\mathbf{Z}, \\ p_{j-i+1}, & i \in 2\mathbf{Z}+1. \end{cases}$$

Директни пирамидални алгоритам у матричном облику гласи

$$x_j = F a_{j-1},$$

док инверзни пирамидални алгоритам у матричном облику гласи

$$a_{j-1} = F^T x_j,$$

где је $x_{j,n} = \begin{cases} a_{j,\frac{1}{2}n}, & n \in 2\mathbf{Z} \\ b_{j,\frac{1}{2}(n-1)}, & n \in 2\mathbf{Z}+1. \end{cases}$

Лема 6. *Ако коефицијенти једначине* (2) *задовољавају услов* (3), *а коефицијенти једначине* (4) *услов* (5), *онда је матрица* F *ортогонална, тј.* $F^{-1} = F^T$.

Доказ. Будући да је $F_{ij} = \begin{cases} f_{j-i}, & i \in 2\mathbf{Z}, \\ p_{j-i+1}, & i \in 2\mathbf{Z}+1 \end{cases}$, то је

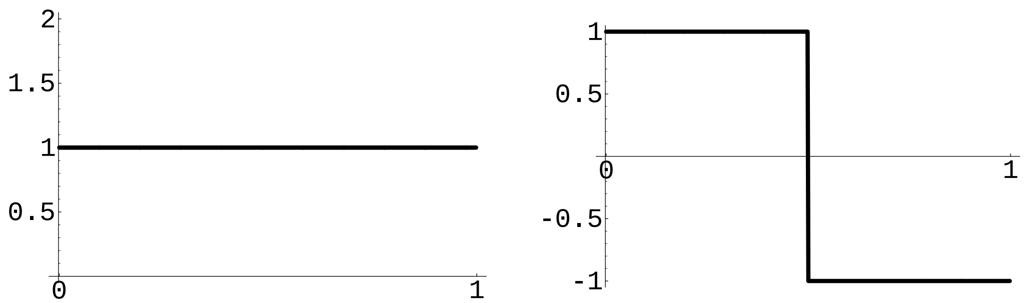
$$(FF^T)_{2i2j} = \sum_k F_{2ik} F^T_{k2j} = \sum_k F_{2ik} F_{2jk} = \sum_k f_{k-2i} f_{k-2j}$$
$$= \sum_n f_n f_{n+2i-2j} = \delta(2j-2i) = \delta(j-i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

и

$$
\begin{aligned}
(FF^T)_{2i2j+1} &= \sum_k F_{2ik}F^T_{k2j+1} = \sum_k F_{2ik}F_{2j+1k} = \sum_k f_{k-2i}p_{k-2j+1-1} \\
&= \sum_n f_n p_{n+2i-2j} = 0.
\end{aligned}
$$

Аналогно се доказује да је $(FF^T)_{2i+12j+1} = \delta(j-i)$ и да је $(FF^T)_{2i+12j} = 0$. ■

Из претходне леме следи да су услови (3) и (5), уз периодично продужење низа улазних коефицијената, довољни за савршену реконструкцију (излаз из инверзног пирамидалног алгоритма једнак је улазу у директни пирамидални алгоритам).



Функција скалирања и таласић мајка одређени коефицијентима (10) односно (12)

Пример 2. Типични примери коефицијената једначине (2) који задовољавају услов (3) су тзв. Haar-ови коефицијенти

$$
f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10}
$$

и тзв. Daubechies коефицијенти реда 2

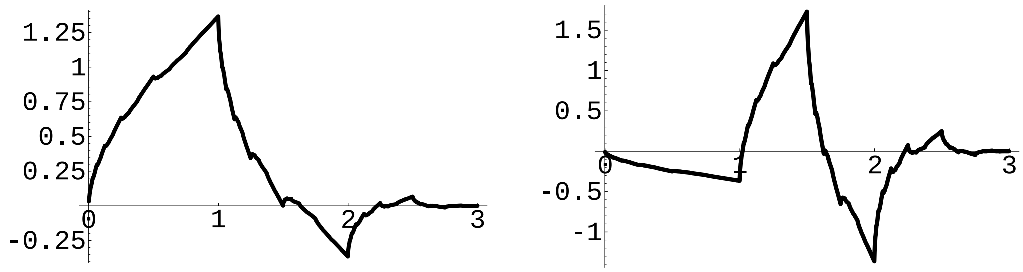
$$
f_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad f_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad f_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad f_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \tag{11}
$$

Преостали коефицијенти су нула. Коефицијенти одговарајућих једначина таласића се добијају из услова (5) и гласе

$$
p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{12}
$$

односно

$$
p_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad p_1 = -\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad p_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad p_3 = -\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \tag{13}
$$



Функција скалирања и таласић мајка одређени коефицијентима (11) односно (13)

Графици припадних функција скалирања и таласића мајки су приказани на одговарајућим сликама.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chui, Charles K., *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
2. Daubechies, Ingrid, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
3. Mallat, Stéphane, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998.
4. Meyer, Yves, *Wavelets Algorithms and Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.
5. Радуновић, Десанка П., *Таласићи (wavelets)*, рукопис, 2004.
6. Strang, Gilbert; Nguyen Truong, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
7. Удовичић, Златко, *Одређивање прага компресије при трансформацији ортонормираним таласићима*, магистарски рад, Математички факултет, Београд, 2005.

Природно-математички факултет, Одсјек за математику, Змаја од Босне 35, 71000 Сарајево, Босна и Херцеговина

E-mail: `zzlatko@pmf.unsa.ba`