Др Ђоко Г. Марковић

НЕКИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПРИМЈЕРИ ПРИМЈЕНЕ КОМБИНОВАНОГ ПОЛИФОРМИЗМА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

Дидактички феномен комбинованог полиформизма, по ономе што сам успио током тридесетогодишњег бављења наставом математике средње школе видјети у математичко-методичкој литератури, веома се ријетко среће као нека дидактичка посебност, а ако се понегдје примјењује, то је обично интуитивно, сингуларно или стихијски у настави математике осмогодишње и средње школе.

Суштина овога значајног дидактичког феномена састоји се у перманентном инсистирању на истовремено интегралном сагледавању разноврсних аритметичко-алгебарско-геометријских приступа разумјевања и поимања проучаваних наставних појмова. Ово у пракси изискује од наставника одлично познавање и вјештину примјењивања најразноврснијих стручно-дидактичко-методичких могућности, а индукује интензивну мисаону активност ученика изражену квалитетним самопрегалачким радом и већом мотивацијом.

Ефикасност примјене комбинованог полиформизма заснива се на вишеструкој примјени принципа очигледности интерпретираног у виду аритметичко-алгебарског и иконичких тума?ења, као и евидентној психолошкој чињеници да промјене и разноврсност у раду освјежавају наставу, а монотонија углавном индукује слабљење интересовања и појаву пасивности и досаде.

На личном искуству, које има важност бар једног експеримента, вишеструко сам провјерио и увјерио се да комбинације аритметичко-алгебарско-геометријских полиформних интерпретација значајно доприносе стварању амбијента неопходног за активизирање, тј. динамизирање наставе математике и разбијање формализма у њој.

Ево једног раритетног комбинованог полиформног доказаивања теореме о срединама, који је уједно и лијепа прилика да се покаже примјена аналитичко-синтетичке методе не само када су у питању одредбени, већи задаци у којима треба доказати извесна тврђења.

Теорема о срединама

За произвољне бројеве $a, b \in \mathbf{R}^+$ важи

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Неједнакости прелазе у једнакости ако и само ако је $a = b$.

Полазећи од очигледне неједнакости $(a-b)^2 \geqslant 0$ могу се алгебарски доказати ове три неједнакости. Ево тих доказа уз указивање на примјену аналитичко-синтетичког метода приликом тих извођења.

Аналитичко-синтетички методски поступак чешће експлоатишемо при рјешавању тзв. конструктивних, тј. одредбених задатака, дакле, задатака типа у којима се нешто захтијева. Аналитичком методом ми одређујемо пут од траженог ка датом, тј. од непознатог ка познатом. Када од непознатог дођемо до познатог, да бисмо комплетирали доказ неопходно је примјенити реверзибилни поступак аналитичком. То је пут од датог, познатог ка траженом, непознатом, односно поступак обједињавања, тј. састављање дијелова у цијелину – синтетички методски поступак. Према грчком предању методу анализе открио је Платон. Вјероватно да је аналитичко-синтетичка метода била позната и примјењивана и прије Платона. Еуклидови „Елементи" писани касније представљају заокружени систем логичког мишљења и први пут у историји образац научног рада. У њима је дат дедуктивни систем мишљења. Аналитичко-синтетички облик дедукције презентован у њима, вјероватно је најуспјешнија метода откривања непознатих доказа геометријских или математичких теорема познатих нашој цивилизацији.

1) Доказаћемо да за ненегативне реалне бројеве, тј. $a, b \in \mathbf{R}^+$ важи $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. У аналитичком поступку полазимо од релације $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, након чега низом импликација добијамо:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2\sqrt{ab} \leqslant a+b \Rightarrow 0 \leqslant a - 2\sqrt{ab} + b \Rightarrow 0 \leqslant (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

Примјеном реверзибилног, тј. синтетичког поступка претходном добијамо:

$$0 \leqslant (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Rightarrow 0 \leqslant a - 2\sqrt{ab} + b \Rightarrow 2\sqrt{ab} \leqslant a+b \Rightarrow \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

2) Доказаћемо да за ненегативне реалне бројеве $a, b \in \mathbf{R}^+$ важи $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. У аналитичком поступку полазимо од релације $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ након чега низом импликација добијамо:

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$$
$$\Rightarrow 2ab \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow 0 \leqslant (a-b)^2.$$

Примјеном реверзибилног, тј. синтетичког поступка претходном добијамо:

$$0 \leqslant (a-b)^2 \Rightarrow 2ab \leqslant a^2+b^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$$
$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

3) Доказаћемо да за ненегативне реалне бројеве, тј. $a, b \in \mathbf{R}^+$ важи $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$. У аналитичком поступку полазимо од релације $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$, након чега низом импликација добијамо:

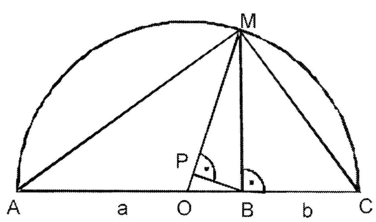
$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \;\Rightarrow\; \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{a+b}{2} \;\Rightarrow\; \frac{ab}{\sqrt{ab}} \leqslant \frac{a+b}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Примјеном реверзибилног, тј. синтетичког поступка претходном добијамо:

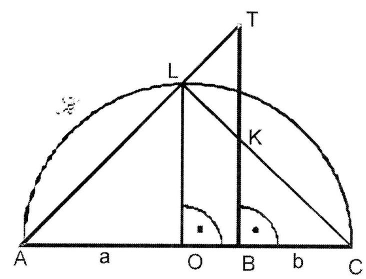
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \;\Rightarrow\; \frac{ab}{\sqrt{ab}} \leqslant \frac{a+b}{2} \;\Rightarrow\; \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{a+b}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}.$$

Међутим, геометријски приступ доказивања ове теореме је очигледнији и занимљивији ученицима. Над збиром $AC = a + b$ датих дужи $AB = a$ и $BC = b$ конструишемо полукружницу као над пречником, па конструишемо $BM \perp AC$, гдје је B тачка на дужи AC, а M пресјечна тачка праве (BM) и конструисане полукружнице. Тачка P припада правој (OM) и $BP \perp OM$.

Лако је уочити да важи: (1) $\quad PM < BM < OM$. Међутим, како је према слици 1, $OM = \dfrac{a+b}{2}$, $BM = \sqrt{ab}$ и $PM : BM = BM : OM$, тј. $PM = \dfrac{2ab}{a+b}$. Тада из неједнакости (1) сљеди $\dfrac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$. Једнакост се постиже ако је $a = b$.



Сл. 1



Сл. 2

Модификујмо мало слику 1. Нека је и даље $AB = a$ и $BC = b$. У тачки O конструишимо нормалу на праву (AC); она сијече полукружницу $K(O, AC/2)$ у тачки L. Нормала конструисана у тачки B на праву (AC) сијече праву (AL) у тачки T, а праву (LC) у тачки K. Са слике 2 је очигледно да је површина троугла ACL мања или једнака површини четвороугла $ACKT$ (једнакост се постиже када је $a = b$).

Дакле, $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$, одакле је $\dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, тако да коначно имамо да је:

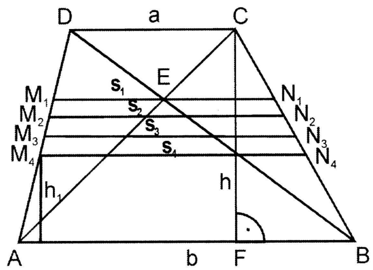
$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

(једнакост се постиже када је $a = b$). Овакав доказ неједнакости између аритметичке и квадратне средине нијесам сретао у мени доступној стручно-методичкој литератури.

Геометријски доказ ове теореме можемо извести и тако што ћемо конструисати произвољан трапез $ABCD$ и у њему паралелне дужи са његовим основицама:

$$M_1N_1 \parallel M_2N_2 \parallel M_3N_3 \parallel M_4N_4 \parallel CD,$$

тако да дужима M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 и M_4N_4 респективно одговарају дужине s_1, s_2, s_3 и s_4, при чему је $s_1 = H(a,b)$ хармонијска средина, $s_2 = G(a,b)$ геометријска средина, $s_3 = A(a,b)$ аритметичка средина и $s_4 = K(a,b)$ квадратна средина дужина a и b дужи CD и AB.



Сл. 3

Лако је уочити да $E \in (M_1N_1)$ и да је s_1 дужина дужи M_1N_1, па на основу Талесове теореме имамо да је $\dfrac{EN_1}{a} = \dfrac{M_1E}{a} = \dfrac{b}{a+b}$ и

$$s_1 = M_1E + EN_1 = 2 \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = H(a,b),$$

слика 3.

Како је дужина s_2 дужи M_2N_2 геометријска средина дужина a и b дужи CD и AB, то су трапези ABN_2M_2 и M_2N_2CD слични, јер је $\dfrac{a}{s_2} = \dfrac{s_2}{b}$. Примјеном Талесове теореме имамо да је $\dfrac{AM_1}{M_1D} = \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{b}{c}$ и $\dfrac{AM_2}{M_2D} = \dfrac{b}{s_2} \leqslant \dfrac{b}{a}$, тј. $\dfrac{AM_1}{M_1D} \geqslant \dfrac{AM_2}{M_2D}$, одакле редом сљеди $\dfrac{AD - M_1D}{M_1D} \geqslant \dfrac{AD - M_2D}{M_2D}$, $\dfrac{AD}{M_1D} \geqslant \dfrac{AD}{M_2D}$, $M_2D \geqslant M_1D$, па на правој (AD) имамо распоред тачака A–M_2–M_1–D, тако да важи

$$H(a,b) = s_1 \leqslant s_2 = G(a,b), \tag{1}$$

при чему се једнакост постиже за $a = b$, тј. када је $M_2 \equiv M_1$. Како имамо да је s_3 аритметичка средина дужина a и b дужи CD и AB, то је $AM_3 \cong M_3D$ и $BN_3 \cong N_3C$, па је лако уочити релацију $\dfrac{AM_2}{M_2D} = \dfrac{b}{s_2} > 1 = \dfrac{AM_3}{M_3D}$, одакле редом сљеди да је $\dfrac{AM_2}{M_2D} \geqslant \dfrac{AM_3}{M_3D}$, $\dfrac{AD - M_2D}{M_2D} \geqslant \dfrac{AD - M_3D}{M_3D}$, $\dfrac{AD}{M_2D} \geqslant \dfrac{AD}{M_3D}$, $M_3D \geqslant M_2D$, па на правој (AD) имамо распоред тачака A–M_3–M_2–D, тако да важи

$$G(a,b) = s_2 \leqslant s_3 = A(a,b), \tag{2}$$

при чему се једнакост постиже за $a = b$, тј. када је $M_3 \equiv M_2$.

Како је дужина s_4 дужи M_4N_4 квадратна средина дужина a и b дужи CD и AB, то су површине трапеза ABN_4M_4 и M_4N_4CD једнаке, јер је тада

$2(s_4+b)h_1 = (a+b)h$ и $2(s_4+a)(h-h_1) = (a+b)h$, одакле произлази да је $\dfrac{h}{h_1} = \dfrac{2(s_4+b)}{a+b}$ и $\dfrac{h}{h_1} = \dfrac{2(s_4+a)}{2(s_4+a)-a-b}$, тј. $\dfrac{2(s_4+b)}{a+b} = \dfrac{2(s_4+a)}{2(s_4+a)-a-b}$, одакле редом слиједи $2(s_4+b)[2(s_4+a)-a-b] = 2(s_4+a)(a+b)$, $(s_4+b)(2s_4+a-b) = (s_4+a)(a+b)$ и, после сређивања, $2s_4^2 = a^2+b^2$, па имамо да је $s_4 = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = K(a,b)$ квадратна средина дужина a и b. Ако претпоставимо да је $b \geqslant a$, онда из $\dfrac{b+s_4}{2}h_1 = \dfrac{a+s_4}{2}(h-h_1)$ слиједи $h_1 \leqslant h-h_1$, па на правој (AD) имамо распоред тачака A–M_4–M_3–D, тако да важи

$$A(a,b) = s_3 \leqslant 4_3 = K(a,b), \tag{3}$$

при чему се једнакост постиже за $a=b$, тј. када је $M_4 \equiv M_3$.

Дакле, на основу (1), (2) и (3) закључујемо да важи

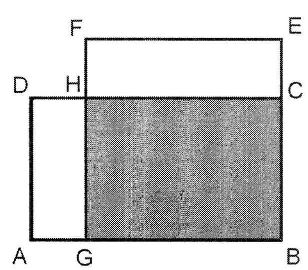
$$H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b) \leqslant K(a,b),$$

за $a, b \in \mathbf{R}^+$.

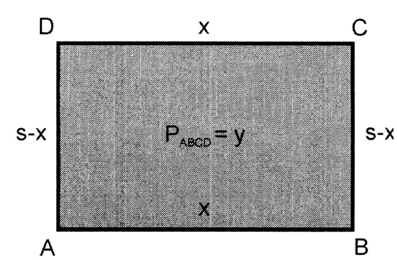
Да бисмо наставу математике учинили што занимљивијом, можемо лако „прескакати“ вијекове „шетајући“ историјском причом у мјери дозираној планом и програмом. Ево једног мало познатог задатка из VI књиге Еуклидових „Елемената“, став 27, који говори о геометријском посматрању које доводи до екстремних вриједности функције. Овај задатак може се радити у I разреду гимназије и средњих стручних школа.

Примјер. Од свих правоугаоника једнаког обима наћи онај који има највећу површину.

Поменуто рјешење прилагођено настави могло би да поприми сљедећу форму. Нека је $\square ABCD$ један од посматраних правоугаоника, а $\square GBEF$ квадрат чији је обим једнак наведеном правоугаонику (слика 4). Тада је $AB+BC = GB+BE$, тј. $AG+GB+BC = GB+BC+CE$, одакле слиједи $AG = CE$.



Сл. 4



Сл. 5

Како је AD краћа страница правоугаоника $\square ABCD$, она је мања од једне четвртине обима, тј. од странице квадрата, $AD < FE$. Пошто правоугаоници $\square AGHD$ и $\square HCEF$ имају по једну страницу једнаку, $AG = CE$, то је због претходне неједнакости површина правоугаоника $\square AGHD$ мања од површине правоугаоника $\square HCEF$, а то значи да је и површина правоугаоника $\square ABCD$ мања од површине квадрата $\square GBEF$. Тако смо доказали да је површина ма којег правоугаоника мања од површине квадрата једнаког обима.

Наведени примјер можемо радити у II и касније у IV разреду у оквиру часова увјежбавања градива код одређивања екстремних вриједности функција. Очито да бисмо исти задатак могли радити у оквиру наставне јединице екстремне вриједности „Квадратна функција" у II разреду средње школе.

Обиљежимо странице промењљивих правоугаоника константног обима $O_{ABCD} = 2s$ са x и $s-x$ (слика 5). Обиљежимо његову површину $P_{ABCD} = y$. Лако је уочити да је $y = x(s-x)$, тј. $y = -x^2 + sx$, гдје је s константан полуобим правоугаоника промјенљивих страница x и $s-x$. Квадратна функција $y = -x^2 + sx$ има екстремну вриједност (максималну површину) у тачки $x = s/2$, када је $y = -\left(\frac{s}{2}\right)^2 + s \cdot \frac{s}{2} = \left(\frac{s}{2}\right)^2$. Очигледно је да се овдје ради о квадрату странице $x = s/2$, тј. квадрату чија је страница једнака једној четвртини датог константног обима.

Јасно да се овај задатак можемо рјешавати и примјеном извода на одређивање екстремума функције.

Уз претходно наведену геометријску интерпретацију, као и ова алгебарско-аналитичка приказивања, добија се лијеп примјер комбинованог полиформизма, чијом примјеном настава математике постаје нестандардна, па самим тим интересантнија, што значајно доприноси разбијању формализма у њој.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Waltert, *Methodik des mathematischen Unterrichts IV*, Heidelberg, 1955.
2. R. Arnhajm, *Vizuelno mišljenje (jedinstvo slike i pojma)*, Beograd, 1985.
3. G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb, 1966.
4. Математическое просвещение, (Третья серия) Издательство МЦНИО, Москва, 2004.
5. Ђ. Г. Марковић, *Геометријски полиформизам*, 3 Макарије, Подгорица, 2006.
6. Ђ. Г. Марковић, *Нови погледи на методику наставе математике*, 3 Макарије, Подгорица, 2008.
7. A. Bilimović, *Euklidovi elementi*, Jugoslovensko štamparsko preduzeće, Beograd, 1949.

E-mail: `nemanjamnk@cg.yu`