Мр Ђорђе Кртинић

АЛГОРИТМИ У СРЕДЊОШКОЛСКОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Појам алгоритма се јавља доста рано у математици (иако само име потиче од арапског математичара Ал Хорезмија) и представља поступак (процедуру). У средњошколској математици је вероватно најпознатији Еуклидов алгоритам, поступак којим се добија (између осталог) најмањи заједнички делилац два природна броја, иначе познат (како име и каже) још у старогрчкој математици. Заправо, чини се да је алгоритам, као начин решавања проблема, једно време био скоро и једини начин решавања сложенијих проблема; наиме, доста дуго се није могло прећи преко тога да се „нешто не може урадити", односно није се ни помишљало да решење проблема може да буде доказ егзистенције решења без ефективне конструкције. Међу најпознатијим методама које се могу подвести под оно што се данас назива алгоритмом је свакако и „метода исцрпљивања", коју је развио Архимед и представља основу за оно што се данас назива интеграцијом (тј. Дарбуовим сумама; треба напоменути да Архимед није знао за координатни систем, већ је рачунајући површину испод параболе користио само геометријску дефиницију параболе). Када је овај начин размишљања прихваћен, развио се приличан број области математике које су одређивале егзистенцију решења без њиховог одређивања, а, на пример, нумеричка математика је развила и читав низ алгоритама којима се одређују приближна (до произвољне тачности) решења неких једначина.

Ипак, треба рећи и да се увођењем нових метода за решавање проблема често дешавало (и дешава) да човек заборави на „основене методе". Један од познатијих историјских примера за ово је Канторов дијагонални поступак, који је разрешио неколико више година отворених проблема и представљао право изненађење за математичаре тог времена. У средњошколској настави математике појам алгоритма најчешће треба да се јавља у комбинаторици, међутим, како је настава комбинаторике прилично смањена (морамо рећи и да ова област, не без разлога, важи за једну од тежих), обично се деца овде сусрећу са пар оваквих конструкција. Такво стање није карактеристично само за нашу земљу; добар пример (истина на највишем средњошколском нивоу) је и задатак 3 са доње листе, који је комплетно решило само два (од преко 500) ученика на Међународној математичкој олимпијади 2007. године. Већина тумачења чланова комисије (која није очекивала овако лошу урађеност овог задатка) била је да су се ученици „одвојили" од основних метода решавања; наиме, већина данашњих тежих школских и такмичарских задатака од ученика обично захтева конструисање неке врсте инваријанте или глобалног пребројавања, док се ретко кад од ученика захтева да ефективно конструише решење (ово се лагано мења повећавањем важности наставе рачунарства у средњим школама).

За крај дајемо три примера алгоритма који су се јављали по разним такмичењима. Треба напоменути да је битан (јако често тежи) део проблема доказати да алгоритам заиста доводи до (тачног!) решења, тј. доказати коректност алгоритма (на пример, честа грешка ученика у рачунарству је конструкција алгоритма који се не завршава, тј. упада у такозвану „бесконачну петљу“).

Задатак 1. Дате су две коначне фамилије интервала, тако да је збир дужина интервала у свакој фамилији једнак 1. Доказати да се они могу распоредити на интервал дужине 1,51 тако да су интервали из исте фамилије дисјунктни, а интервали из различитих фамилија или дисјунктни или један од њих садржи други. Доказати да постоје фамилије тако да не постоји овакав распоред на интервал дужине 1,49.

Решење. Назовимо интервале прве фамилије *црвеним*, а друге *белим*. Врши се следећи алгоритам:

1° бира се (један од) интервала максималне дужине који већ није коришћен;

2° међу интервалима друге боје узима се највећи који је могуће поставити у интервал изабран у 1° (и који већ није коришћен) и постави у 1°;

корак 2° се понавља док год је то могуће, а након тога се враћа на корак 1°.

Овако описан алгоритам се завршава, јер су у питању коначне фамилије интервала.

Нека су интервали бирани у кораку 1° „основни интервали“ и нека је последње бирани основни интервал црвен. Тада је дужина покривеног дела основних белих интервала већа од дужине непокривеног дела (иначе би се последњи основни црвени интервал могао сместити у бели основни интервал, а он је мање дужине од свих до тада искоришћених црвених интервала), па је макар $\frac{1}{2}$ дужине свих белих интервала покривена више од једном. Следи да је дужина свих основних интервала највише 1,5, односно они се могу распоредити на интервал дужине 1,51.

Са друге стране, ако прву фамилију чине два интервала дужине 0,5, а другу интервал дужине 0,999 и интервал дужине 0,001, они се не могу распоредити тако да испуњавају услове задатка на интервал дужине мање од 1,499.

Задатак 2. Доказати да се произвољна бијекција $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ може представити у облику $f = u + v$, где су $u, v\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ бијекције.

Напомена. Слични задаци се често виђају приликом испитивања кардиналности скупова (видети нпр. [3], стране 46 и 47). Задатак 2 је заправо и настао отежавањем овог задатка.

Решење. Како је f бијекција, $f = u + v \Leftrightarrow \mathrm{Id} = u \circ f^{-1} + v \circ f^{-1}$, тј. тврђење је довољно доказати за $f \equiv \mathrm{Id}$.

Нека је $u(0) = v(0) = 0$. Вредности функција u и v у тачкама m и $-m$ рачунају се по следећем алгоритму:

1° нека је $i = 1$;

2° нека су k и l најмањи природни бројеви који се не налазе у слици фунција u и v, редом;

(а) ако је $k \leqslant l$, нека је $u(-i) = -k$, $u(i) = k$, $v(-i) = k + i$, $v(i) = -k - i$;

(б) ако је $k > l$, нека је $u(-i) = -l - i$, $u(i) = l + i$, $v(-i) = l$, $v(i) = -l$;

3° ако је $i = m$ алгоритам се завршава, иначе, i се повећа за 1, а након тога се врати на корак 2°.

Овим алгоритмом се могу дефинисати вредности функција u и v за произвољан цео број. Такође, оне су сурјекције. Заиста, ако је $n \in \mathbf{N}$ најмањи број за који није у слици функције u (или не налази у слици v, а налази у слици u), тада ће се n наћи у слици u (односно v) у наредној примени корака 2° претходног алгоритма. Слично, ако се n не налази ни у слици u ни у слици v, наћи ће се након две примене корака 2° претходног алгоритма.

Ако је $u(i) = u(j) = m$ за неке i, j, $i < j$ и $m > 0$ (аналогно се показује у случају $m < 0$; из дефиниције u следи да је $u(\mathbf{N}) \subseteq \mathbf{N}$ и $u(-\mathbf{N}) \subseteq -\mathbf{N}$, што оправдава ову претпоставку), тада се $u(j)$ не дефинише кораком 2(а) горњег алгоритма (пошто је $u(i) = m$, па m није најмањи природни број који се не налази у слици фунције u у j-том кораку), па је $u(-j) = -l - j$, $u(j) = l + j = m$, $v(-j) = l$, $v(j) = -l$ за неко l. Следи $i < j < m$. Међутим, због $i + 1 < m$ следи да се ни $u(i)$ не дефинише кораком 2(а) горњег алгоритма (пошто је се након i корака у слици u налази $i < m-1$ природних бројева, па m не може бити најмањи од преосталих). Дакле, постоји $k < l$ тако да је $u(-i) = -l - k$, $u(i) = k + i = m$, $v(-i) = k$, $v(i) = -k$. Следи $i = m - k > m - l = j$, што је у контрадикцији са $i < j$.

Аналогно се показује да не може бити $v(i) = v(j) = m$ за неке i, j, $i \neq j$, па следи да су u и v и инјекције.

Коначно, за свако цело n је $u(n) + v(n) = n$ (ове вредности су дефинисане у n-том кораку алгоритма), тј. $u + v = \mathrm{Id}$.

Задатак 3. На математичком такмичењу неки ученици су пријатељи; ако је A пријатељ са B, тада је и B пријатељ са A. Група ученика се назива *дружина* ако су свака два ученика у тој групи пријатељи. (Специјално, свака група са мање од два ученика је дружина.) Број ученика у дружини назива се њеном *величином.*

На овом такмичењу максимална величина дружине је паран број. Доказати да се ученици могу распоредити у две собе, тако да је максимална величина дружине у једној соби једнака максималној величини дружине у другој соби.

Решење. Нека су сви ученици једне од дружина максималне величине $2n$ смештени у собу X, а остали у собу Y. Ученика те дружине назовимо П-ученицима. Нека су $d(X)$ у $d(Y)$ максималне величине дружина у собама X и Y, редом. Пребацивањем једног ученика из собе X у собу Y, $d(X)$ се смањује за 1, а $d(Y)$ се или не мења или повећава за 1, па се $d(X) - d(Y)$ мења или за 1 или за 2. Дакле, наставком овог поступка, у једном моменту ће бити или $d(X) = d(Y)$ (чиме би било доказано тврђење задатка) или $d(Y) = d(X) + 1$.

Нека је $d(X) = l$, $d(Y) = l + 1$. У наставку се разликују ситуације:

1° Ако постоји П-ученик који не припада некој од дружина максималне величине у Y, његовим пребацивањем у собу X остаје $d(Y) = l + 1$, али се повећава $d(X)$, тј. постаје $d(X) = l + 1$, па је доказано тврђење задатка.

2° Иначе, сви П-ученици у Y припадају свим дружинама максималне величине у Y. Тада произвољна дружина величине $l + 1$ у соби Y садржи $2n - l$ П-ученика, па је $0 \leqslant l + 1 - (2n - l) = 2(n - l) + 1$ непаран број, односно важи $1 \leqslant l + 1 - (2n - l)$. Другим речима, у свакој дружини величине $l + 1$ у Y постоји ученик који није П-ученик.

Докле год постоје дружине величине $l + 1$ у Y (има их коначно), ради се следеће: уочи се дружина величине $l + 1$, у њој се уочи ученик који није П-ученик и пребаци у собу X. На овај начин ће у једном моменту нестати дружина величине $l + 1$ у Y (како се $d(Y)$ или не мења или смањује за 1, тада ће бити $d(Y) = l$), па је у овој ситуацији још довољно показати да овим поступком остаје $d(X) = l$.

Заиста, ако би се у X створила дружина величине $l + 1$, тада сви ученици те дружине познају свих $2n - l$ П-ученика у Y (или по начину бирања, ако су пребачени из Y, или су П-ученици), па унија ове две дружине чини дружину величине $(l + 1) + (2n - l) = 2n + 1 > 2n$, што је контрадикција са претпоставком да је максимална величина дружине $2n$.

Овим разматрањем је доказано тврђење задатка.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium*, Springer 2004.
2. П. Младеновић, Ђ. Кртинић, *Међународне и балканске математичке олимпијаде 1996-2006*, Друштво математичара Србије 2007.
3. W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, Polish scientific publishers 1965.

Математички факултет, Студентски трг 16, Београд

E-mail: `georg@matf.bg.ac.yu`