МОЈ ЧАС

Никола Александров

ЈЕДАН ЗАДАТАК НА ВИШЕ НАЧИНА

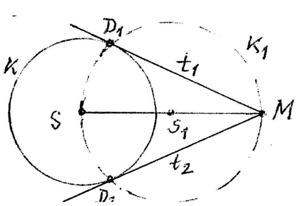
Решавање задатака заузима значајно место у математичком образовању. Познато је да путеви који воде ка решавању математичког задатка могу бити различити. Треба, наравно, изабрати најекономичнији и најелегантнији поступак.

За књижевно образовање је, кажу, боље једну књигу прочитати десет пута, него десет књига по једанпут. Слично се може рећи и за математичке задатке. Боље је један исти задатак решити на више начина, него више задатака на један начин.

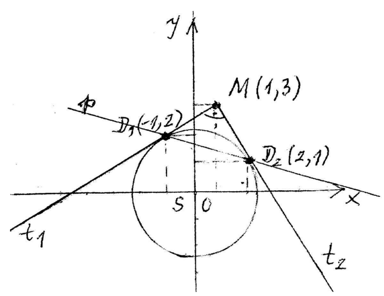
Овде ћемо приказати осам различитих начина решавања следећег задатка.

Задатак. *Одредити једначине тангената из тачке* $M(1,3)$ *на круг* (k)*:* $x^2+y^2=5$.

1. начин. Из елементарне геометрије нам је познат задатак о тангентама из тачке M на круг k: 1) одредимо средиште S_1 дужи SM; 2) конструишемо круг $k_1(S_1, SM/2)$; 3) $k\cap k_1=\{D_1,D_2\}$; 4) $MD_1\equiv t_1$ и $MD_2\equiv t_2$ су тангенте (конструкција је дата на слици 1).



Сл. 1



Сл. 2

Користећи конструкцију са описаним корацима (1)–(4), одредићемо на аналитички начин тражене једначине тангената. Наћи ћемо једначину круга $k_1(S_1, SM/2)$. Одредимо координате средишта $S_1(p_1,q_1)$ дужи SM. Имамо

$$p_1=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},\quad q_1=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2},\quad \text{дакле}\quad S_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).$$

Одредимо једначину круга (k_1): $(x-p_1)^2+(y-q_1)^2=r_1^2$. Како је $|SM|^2=(0-1)^2+(0-3)^2=10$, $r_1=\sqrt{10}/2$, то круг k_1 има једначину $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$.

Тражимо пресечне тачке кругова k и k_1, односно решавамо систем једначина $x^2+y^2=5 \wedge \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$. Добијамо $x_1=-1$, $y_1=2$ и $x_2=2$, $y_2=1$.

Дакле, $D_1(-1,2)$ и $D_2(2,1)$ су пресечне (додирне) тачке. Како тангента t_1 садржи тачке M и D_1, њена једначина је $\frac{y-3}{2-3}=\frac{x-1}{-1-1}$, односно (t_1): $x-2y+5=0$. Слично се добија једначина тангенте (t_2): $2x+y-5=0$.

2. начин. Нека је тражена тангента (t): $y=kx+n$. Услов да права $y=kx+n$ буде тангента круга $x^2+y^2=r^2$ је (1) $r^2(1+k^2)=n^2$. Тангента треба да садржи тачку M. Њене координате морају да задовољавају једначину сваке тангенте $y=kx+n$. Мора, дакле, бити $3=k+n$. Уз то мора бити задовољена и условна једначина (1): $5(1+k^2)=n^2$.

Те две једначине чине систем са непознатим k и n. Елиминацијом n добијамо $2k^2+3k-2=0$, тј. $k_1=-2$, $k_2=1/2$, а затим и $n_1=5$ и $n_2=5/2$. Једначине тангената су, дакле, $y=-2x+5$ и $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, односно у имплицитном облику (t_1): $2x+y-5=0$, (t_2): $x-2y+5=0$. Како је $-2\cdot\frac{1}{2}=-1$, те тангенте су међусобно нормалне (сл. 2).

3. начин. За централни круг $x^2+y^2=r^2$ једначина тангенте у тачки додира $D_0(x_0,y_0)$ гласи $xx_0+yy_0=r^2$. У датом задатку, (t): $xx_0+yy_0=5$ (2). Користимо два услова:

1) Тангента садржи тачку $M(1,3)$, па је $x_0+3y_0=5$ (3).

2) Додирна тачка D_0 је на кругу, па је $x_0^2+y_0^2=5$ (4).

Решавањем система једначина (3) и (4), добијамо после сређивања квадратну једначину $y_0^2-3y_0+2=0$ чија су решења $(y_0)_1=2$, $(y_0)_2=1$ и одговарајуће вредности за x_0 су $(x_0)_1=-1$, $(x_0)_2=2$. Додирне тачке су, дакле, $D_1(-1,2)$ и $D_2(2,1)$. Замењујући ове вредности у (2), добијамо једначине тангената (t_1): $x-2y+5=0$, (t_2): $2x+y-5=0$.

4. начин. Нека је права $y=kx+n$ тражена тангента. Како она садржи тачку $M(1,3)$, мора бити $3=k+n$. Имплицитни облик једначине праве је $kx-y+n=0$. Користимо да је растојање рачке $O(0,0)$ од праве $kx-y+n=0$

$$\sqrt{5}=\frac{|k\cdot 0-0+n|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

После сређивања, замењујући $n=3-k$, добија се квадратна једначина $2k^2+3k-2=0$. Даље се поступа као у другом решењу.

5. начин. Задатак решавамо помоћу поларе. Полара је права која спаја додирне тачке тангената повучених из тачке ван круга на круг. Једначина поларе из тачке $M(x',y')$ на круг $x^2+y^2=r^2$ је (p): $x'x+y'y=r^2$. Видимо да се једначина поларе формира на исти начин као и једначина тангенте у датој тачки круга – само што уместо координата додирних тачака стоје координате пола $M(x',y')$.

Дакле, једначина поларе из тачке $M(1,3)$ на круг $x^2+y^2=5$ је (p): $x+3y-5=0$. Решавањем система који чине једначина поларе и једначина круга добијамо координате додирних тачака тангената $D_1(-1,2)$ и $D_2(2,1)$. Тангенте t_1 и t_2 су праве MD_1 и MD_2, па се њихове једначине лако налазе (видети прво решење).

6. начин. Задатак решавамо применом скаларног производа, користећи својство $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$.

Нека је $D_0(x_0,y_0)$ додирна тачка тангенте и круга $x^2+y^2=5$. Како је додирна тачка D_0 на кругу, то је $x_0^2+y_0^2=5$. Мора да важи $\overrightarrow{SD_0}\perp\overrightarrow{MD_0}$, тј. $\overrightarrow{SD_0}\cdot\overrightarrow{MD_0}=0$ (5) ($S(0,0)$ је центар круга, в. слику 1). Како је $\overrightarrow{SD_0}=(x_0-0,y_0-0)=(x_0,y_0)$ и $\overrightarrow{MD_0}=(x_0-1,y_0-3)$, то заменом у (5) добијамо услов

$$0=x_0(x_0-1)+y_0(y_0-3)=x_0^2-x_0+y_0^2-3y_0,$$

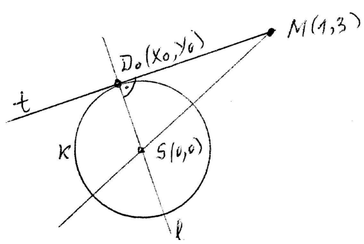
који се, због $x_0^2+y_0^2=5$, своди на $x_0+3y_0=5$. Из система једначина $x_0^2+y_0^2=5$, $x_0+3y_0=5$ се лако добијају координате двеју додирних тачака $D_1(-1,2)$ и $D_2(2,1)$.

7. начин. Све праве које садрже тачку $M(1,3)$ су облика $y-3=k(x-1)$, тј. $y=kx-k+3$. Заменом у једначину круга $x^2+y^2=5$ добијамо $x^2+(kx-k+3)^2=5$. Сређивањем се добија квадратна једначина по x,

$$(1+k^2)x^2+2k(3-k)x+k^2-6k+4=0. \tag{6}$$

Права ће додиривати круг ако и само ако једначина (6) има двоструко решење, тј. ако је њена дискриминанта једнака нули, дакле, $(k(3-k))^2-(1+k^2)(k^2-6k+4)=0$. Сређивањем се добија једначина $2k^2+3k-2=0$, чија су решења $k_1=-2$ и $k_1=\frac{1}{2}$. Даље се поступа као у другом решењу.

8. начин. Права l кроз центар S има једначину (l): $y=k'x$ (сл. 3). Како она садржи додирну тачку $D_0(x_0,y_0)$, то је $y_0=k'x_0$. Тангента t садржи тачку $M(1,3)$, па је њена једначина $y-3=k(x-1)$ (7).



Сл. 3

Праве l и t су међусобно нормалне, па је $k'=-1/k$. Из $k'=\dfrac{y_0}{x_0}$ онда следи $k=-\dfrac{x_0}{y_0}$. Једначина (7) постаје $y_0-3=-\dfrac{x_0}{y_0}(x_0-1)$. Сређивањем и коришћењем да је $x_0^2+y_0^2=5$ (додирна тачка D_0 је на кругу), добијамо $x_0+3y_0=5$.

Даље се, на пример као у трећем решењу, добијају додирне тачке $D_1(-1,2)$ и $D_2(2,1)$, а овде и коефицијенти $k_1=-\dfrac{x_0}{y_0}=\dfrac{1}{2}$ и $k_2=-\dfrac{2}{1}=-2$. Замењујући у (7) добијају се једначине тангената.

Гимназија у Босилеграду, 17540 Босилеград