Др Шефкет Арсланагић

ЈЕДНА АЛГЕБАРСКА НЕЈЕДНАКОСТ И ЊЕНЕ ПОСЉЕДИЦЕ

Неједнакост између аритметичке и геометријске средине (АГ-неједнакост) за два позитивна броја x и y, која гласи

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}, \qquad x, y > 0, \tag{1}$$

добро је позната многим ученицима. Они су је често користили при доказивању других тежих неједнакости. Рецимо и то још да вриједи једнакост у (1) ако и само ако је $x = y$.

У овом чланку ћемо разматрати једну посљедицу ове неједнакости,

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geqslant 2, \qquad u, v > 0. \tag{2}$$

Вриједи једнакост у (2) само у случају $u = v$. Сада ћемо показати како се неједнакост (2), мада наизглед веома проста, може ефикасно користити за доказивање много тежих неједнакости. Ово ћемо демонстрирати на неколико интересантних примјера.

Примјер 1. Доказати да вриједи неједнакост

$$a + b + c \geqslant 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} - \sqrt{ab}), \tag{3}$$

гдје су $a, b, c > 0$.

Доказ. Дату неједнакост напишимо у облику $a+b+c+2\sqrt{ab} \geqslant 2\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, односно

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + c}{\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \geqslant 2, \quad \text{тј.} \quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \geqslant 2,$$

што је тачно на основу неједнакости (2) узимајући да је $u = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$, $v = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Дакле, неједнакост (3) је тачна. Вриједи у њој једнакост ако је $u = v$, тј. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$.

Примјер 2. Доказати да вриједи неједнакост

$$a^2 + b + \sqrt{a} + \sqrt{ab}(a\sqrt{b} - 4\sqrt{a}), \tag{4}$$

ако је $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Доказ. Дату неједнакост напишимо у облику

$$a^2+b+\sqrt{a}+ab\sqrt{a}-4a\sqrt{b}\geqslant 0. \tag{5}$$

Ако је $a=0$ или $b=0$, тада је неједнакост (5), односно њој еквивалентна неједнакост (4) очигледно тачна. Ако је $a\neq 0$ и $b\neq 0$, тј. $a\sqrt{b}>0$, то дијелећи обје стране неједнакости (5) са $a\sqrt{b}$, добијамо њој еквивалентну неједнакост

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{ab}-4\geqslant 0,$$

тј. $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{a}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{ab}\geqslant 4$, а ова неједнакост је тачна због (2) јер је сада

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{a}\geqslant 2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{ab}\geqslant 2.$$

Дакле, неједнакост (5) је тачна па је тачна и њој еквивалентна дата неједнакост (4). Једнакост у (4) вриједи само у случају када је $a=\sqrt{b}$ и $\sqrt{ab}=1$, тј. $a=b=1$.

Примјер 3. Доказати неједнакост

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}}\geqslant 1 \quad \text{за све} \quad x\in\mathbf{R}. \tag{6}$$

Доказ. Имамо

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x^2+1+1}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right).$$

Сада дата неједнакост постаје $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{4x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right)\geqslant 1$, односно

$$\sqrt{4x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\geqslant 2. \tag{7}$$

Неједнакост (7) је тачна, она слиједи из неједнакости (2) стављајући да је $u=\sqrt{4x^2+1}$, $v=1$. Једнакост вриједи само у случају када је $\sqrt{4x^2+1}=1$, тј. $x=0$.

Примјер 4. Доказати да вриједи неједнакост

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1. \tag{8}$$

гдје су $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Доказ. Након множења дате неједнакости (8) са $(a+b)(b+c)>0$, добијамо њој еквивалентну неједнакост

$$\frac{a(a+b)(b+c)}{b}+\frac{b(a+b)(b+c)}{c}+\frac{c(a+b)(b+c)}{a}\geqslant(a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c),$$

односно, послије сређивања,

$$\frac{a^2c}{b}+\frac{b^2(a+b)}{c}+\frac{bc(b+c)}{a}\geqslant 2b^2+2bc+ab. \tag{9}$$

Лијеву страну неједнакости (9) можемо написати у облику

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2c}{b}+\frac{b^3}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2c}{b}+\frac{bc^2}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^3}{c}+\frac{c^2b}{a}\right)+b^2\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

и зато због (1) и (2):

$$\begin{aligned}\frac{a^2c}{b}+\frac{b^2(a+b)}{c}+\frac{bc(b+c)}{a} &\geqslant \sqrt{\frac{a^2c}{b}\cdot\frac{b^3}{c}}+\sqrt{\frac{a^2c}{b}\cdot\frac{bc^2}{a}}+\sqrt{\frac{b^3}{c}\cdot\frac{c^2b}{a}}+2b^2\\ &= ab+\left(\sqrt{ac^3}+\sqrt{\frac{b^4c}{a}}\right)+2b^2 \geqslant ab+2\sqrt[4]{ac^3\cdot\frac{b^4c}{a}}+2b^2\\ &= ab+2bc+2b^2,\end{aligned}$$

тј. неједнакост (9) је тачна па је тачна и њој еквивалентна дата неједнакост (8). Вриједи једнакост само у случају $a=b=c$.

Примјер 5. Одредити троцифрен број $\overline{abc}$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$) за кога важи $a+b+c=9$ и $9a^2+9b^2+9c^2-6abc\leqslant a^3+b^3+c^3$.

Рјешење. Дату неједнакост можемо написати у облику $a^2(9-a)+b^2(9-b)+c^2(9-c)\leqslant 6abc$, односно због $a+b+c=9$:

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\leqslant 6abc.$$

Након дијељења горње неједнакости са $abc>0$, добијамо:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\leqslant 6.$$

Како примјеном неједнакости (2) добијамо да вриједи $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 6$, слиједи да вриједи само једнакост

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=6,$$

и то у случају када је $a=b=c$. Тада је $a+b+c=3a$ ($=3b=3c$), односно $a=b=c=3$. Дакле, у питању је број $\overline{abc}=333$.

Примјер 6. Ако су a,b,c дужине страница троугла, доказати да вриједи неједнакост

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geqslant 48(s-a)(s-b)(s-c), \tag{10}$$

гдје је $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ полуобим троугла.

Доказ. Због $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ дата неједнакост (10) је еквивалентна неједнакости

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geqslant 6(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c). \tag{11}$$

Доказаћемо сада да вриједи неједнакост

$$abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c). \tag{12}$$

Пошто је у троуглу $b+c-a>0$, $c+a-b>0$, $a+b-c>0$, то имамо, на основу неједнакости (1), $\dfrac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}\geqslant\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$, односно

$$c\geqslant\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}. \tag{13}$$

Аналогно добијамо и ове неједнакости:

$$(14) \qquad a \geqslant \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \quad \text{и} \quad b \geqslant \sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}.$$

Очигледно након множења неједнакости (13) и (14) добијамо неједнакост (12). Сада ћемо доказати да вриједи неједнакост

$$(15) \qquad a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqslant 6abc,$$

која је послије дијељења са $abc > 0$ еквивалентна неједнакости

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geqslant 6.$$

а ова неједнакост је очигледно тачна на основу (2). Сада на основу неједнакости (15) и (12) добијамо неједнакост (11), односно дату неједнакост (10). Вриједи једнакост у (10) ако и само ако је $a=b=c$, тј. када је у питању једнакостранични троугао.

Примјер 7. Доказати да вриједи неједнакост

$$(16) \qquad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}, \qquad (a,b,c>0).$$

Доказ. У литератури је дато много разних доказа ове неједнакости која је позната као *Несбитова неједнакост.* Ми ћемо дати још један њен доказ у коме ћемо користити неједнакост (2). Наиме, користићемо неједнакост (2) у облику:

$$\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+c}{c+a} \geqslant 2, \quad \frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{a+b} \geqslant 2, \quad \frac{b+c}{a+b}+\frac{a+b}{b+c} \geqslant 2.$$

Након сабирања ових неједнакости, добијамо:

$$\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+b}{b+c} \geqslant 6,$$

тј. $\dfrac{2a+b+c}{b+c}+\dfrac{2b+c+a}{c+a}+\dfrac{2c+a+b}{a+b} \geqslant 6$, односно

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+1+1+1 \geqslant 6,$$

а одавде $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$, што је и требало доказати. Вриједи једнакост у (16) ако и само ако је $a=b=c$.

Примјер 8. Доказати да за троугао ABC вриједи неједнакост

$$(17) \qquad \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} \geqslant 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Доказ. Из косинусне теореме примјењене на троугао ABC имамо $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, односно $2\cos\alpha+\dfrac{a^2}{bc}=\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}$, а одаве на основу неједнакости (2),

$$\frac{a^2}{bc} \geqslant 2(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогно добијамо и неједнакости $\dfrac{b^2}{ca} \geqslant 4\sin^2\dfrac{\beta}{2}$ и $\dfrac{c^2}{ab} \geqslant 4\sin^2\dfrac{\gamma}{2}$. Након сабирања посљедње три неједнакости, добијамо дату неједнакост (17). Вриједи једнакост у (17) ако и само ако је $a = b = c$, тј. када је у питању једнакостранични троугао.

Примјер 9. Ако су α, β и γ унутрашњи углови троугла ABC, доказати да вриједи неједнакост

(18)
$$\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\gamma}+\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\sin\beta}}+\frac{\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}-\sqrt{\sin\gamma}} \geqslant 3.$$

Доказ. Означимо са a, b, c дужине страница датог троугла. Из $a < b+c$ лако се изводи да је $\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$, јер имамо:

$$a < b + c \iff \sqrt{a} < \sqrt{b+c} < \sqrt{b + 2\sqrt{bc} + c} = \sqrt{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2} = \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Сада је

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{b}{2R}} + \sqrt{\frac{c}{2R}} - \sqrt{\frac{a}{2R}} \\ &= \frac{1}{2R}(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}) > 0, \end{aligned}$$

тј. $\sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\alpha} > 0$, те аналогно:

$$y = \sqrt{\sin\gamma} + \sqrt{\sin\alpha} - \sqrt{\sin\beta} > 0 \quad \text{и} \quad z = \sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} - \sqrt{\sin\gamma} > 0.$$

При томе је $\sqrt{\sin\alpha} = \dfrac{y+z}{2}$, $\sqrt{\sin\beta} = \dfrac{z+x}{2}$, $\sqrt{\sin\gamma} = \dfrac{x+y}{2}$, па је лијева страна неједнакости (17) која се доказује:

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right),$$

што је веће од $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ на основу неједнакости (2). Овим је неједнакост (18) доказана. Једнакост вриједи у (18) ако и само ако је $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, тј. $a = b = c$ (једнакостранични троугао).

На крају ћемо дати и једно побољшање неједнакости (2) које смо обилато користили у овом раду. Наиме, доказаћемо да вриједи неједнакост

(19)
$$a^n + \frac{1}{a^n} \geqslant 2 + n^2\left(a + \frac{1}{a} - 2\right),$$

ако је $n \in \mathbf{N}$ и $a > 0$.

Доказ. Користићемо неједнакости (АГ) између аритметичке и геометријске средине n позитивних бројева x_1, x_2, ... , x_n, у облику

(20)
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Сада имамо на основу (20):

$$\begin{aligned}(a^n-1)^2 &= (a-1)^2(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)^2\\ &\geqslant (a-1)^2(n\sqrt[n]{a^{n-1}\cdot a^{n-2}\cdot\ldots\cdot a\cdot 1})^2\\ &= (a-1)^2\left(n\sqrt[n]{a^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0}}\right)^2 = n^2(a-1)^2\left(\sqrt[n]{a^{\frac{n(n-1)}{2}}}\right)^2\\ &= n^2a^{n-1}(a-1)^2,\end{aligned}$$

односно $a^{2n}-2a^n+1\geqslant n^2a^{n-1}(a^2-2a+1)$, а одавде након дијељења са $a^n>0$,

$$a^n+\frac{1}{a^n}\geqslant 2+n^2\left(a+\frac{1}{a}-2\right),$$

што је и требало доказати. Једнакост вриједи за $a=1$.

Напомена. Узимајући да је $a=\sqrt[n]{t}$, $t>0$, добијамо из (19):

$$t+\frac{1}{t}\geqslant 2+n^2\left(\sqrt[n]{t}+\frac{1}{\sqrt[n]{t}}-2\right)\geqslant 2, \tag{21}$$

јер је због (2): $\sqrt[n]{t}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{t}}\geqslant 2$. Неједнакост (19) представља побољшање неједнакости (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo 2004.
2. Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka iz elementarne matematike sa osnovama teorije*, Grafičar promet, Sarajevo 2006.
3. I.V. Maftei, P.G. Popescu, M. Piticari, C. Lupu, M.A. Tataram, *Inegalitati alese in matematica - Inegalitati clasice*, Editura Niculescu, 2005.
4. И.Х. Сивашинский, *Теореми и задачи по алгебре и элеменатрным функциям*, Наука, Москва 1971.

Универзитет у Сарајеву, Природно-математички факултет, Змаја од Босне 35, 71000 Сарајево, Босна и Херцеговина

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba