Ивана Милићевић

АКСИОМАТСКО ЗАСНИВАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

Тригонометријске функције се обично изучавају на основу геометријских дефиниција. Иако су оне трансцендентне, тј. не могу се задати формулом са коначно много алгебарских операција, ове функције се могу дефинисати и чисто аналитичким путем, независно од геометрије. Таква је, на пример, дефиниција тригонометријских функција помоћу степених редова („Вајерштрасовски приступ“) која представља основу савремене аналитичке теорије ових функција.

Један од негеометријских начина заснивања тригонометријских функција је следећа аксиоматска дефиниција. На основу ње такође можемо извести добро позната својства ових функција.

Дефиниција. Тригонометријским косинусом и синусом називамо функције за које важе следећи услови:

(I) дефинисане су за све реалне вредности аргумента;

(II) задовољавају функционалну једнакост

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

за све вредности x и y;

(III) позитивне су у интервалу $0<x<p$, где је p неки позитиван број, тј.

$$\cos x>0 \quad \text{и} \quad \sin x>0 \quad \text{за } 0<x<p;$$

(IV) у граничним тачкама интервала $(0,p)$ је $\cos 0=\sin p=1$.

Наведена дефиниција не даје одговор на питање да ли постоје функције $\cos x$ и $\sin x$ које задовољавају наведене услове, као ни да ли су оне јединствено одређене. Јединственост ће бити касније доказана, а сада директно из дефиниције можемо извести основна својства функција $\cos x$ и $\sin x$.

Особине функција $\sin x$ и $\cos x$

1. У граничним тачкама интервала $(0,p)$ важе једнакости $\sin 0=\cos p=0$.

Доказ. Замењујући у услову (II) $x=y=0$ добијамо $\cos 0=\cos^2 0+\sin^2 0$, а одавде на основу услова (IV) имамо да је $1=1+\sin^2 0$, тј. $\sin 0=0$. За $x=y=p$

услов (II) постаје $\cos 0 = \cos^2 p + \sin^2 p$, па из (IV) добијамо $1 = \cos^2 p + 1$ и $\cos p = 0$. ■

2. За функције $\cos x$ и $\sin x$ важи основни идентитет

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Доказ. Ако у услов (II) заменимо $x = y$, добићемо да је $\cos 0 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Применом услова (IV) имамо $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. ■

Из овог непосредно закључујемо и да је

$$|\cos x| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |\sin x| \leqslant 1.$$

3. Важе једнакости $\cos(p - x) = \sin x$ и $\sin(p - x) = \cos x$.

Доказ. Ако у основном услову (II) заменимо x са p и y са x, добићемо

$$\cos(p - x) = \cos p \cos x + \sin p \sin x.$$

Ако затим заменимо x са $p - y$, уз услов (IV) и доказано својство $\cos p = 0$ добићемо да је $\cos y = \sin(p - y)$. Слично се добија прва једнакост. ■

4. За функцију синус важи

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x.$$

Доказ. Коришћењем доказаног својства 3 имамо

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \cos[p - (x + y)] = \cos[(p - x) - y] \\ &= \cos(p - x)\cos y + \sin(p - x)\sin y = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \quad ■ \end{aligned}$$

5. Функција $\cos x$ је парна, а $\sin x$ непарна.

Доказ. Ако у услов (II) ставимо $x = 0$, добићемо

$$\cos(-y) = \cos 0 \cos y + \sin 0 \sin y = \cos y,$$

што значи да је косинус парна функција. Докажимо да је синус непарна функција. Ако у доказано својство 4 ставимо $y = -x$, добијамо

$$\begin{aligned} \sin(x - x) &= \sin x \cos(-x) + \sin(-x)\cos x = \sin x \cos x + \sin(-x)\cos x, \\ \sin 0 &= \cos x[\sin x + \sin(-x)]. \end{aligned}$$

Сада разликујемо два случаја:

1) $\cos x \neq 0$. Тада је $\sin x + \sin(-x) = 0$, тј. $\sin(-x) = -\sin x$.

2) $\cos x = 0$. Нека је y из интервала $(0, p)$. Како је према услову (III) дефиниције $\cos y > 0$, тада је као у случају 1) $\sin(-y) = -\sin y$ и применом претпоставке 2) је $\sin^2 x = 1$, $\sin x = \pm 1$ и

$$\cos(x + y) = \cos(x - (-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y) = \pm\sin(-y) \neq 0.$$

У том случају је

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= -\sin(-x-y),\\ \sin x\cos y+\sin y\cos x &= -\sin(-x)\cos(-y)-\sin(-y)\cos(-x),\\ \sin x\cos y &= -\sin(-x)\cos y,\\ \sin x &= -\sin(-x),\end{aligned}$$

а то је и требало доказати. ■

6. Из услова дефиниције (I)–(IV) и изведених својстава 1–5 функција $\cos x$ и $\sin x$ закључујемо да важе следеће четири формуле:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y-\sin x\sin y,\\ \cos(x-y) &= \cos x\cos y+\sin x\sin y,\\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y+\sin y\cos x,\\ \sin(x-y) &= \sin x\cos y-\sin y\cos x.\end{aligned}$$

На основу ових формула изводе се на уобичајени начин формуле за косинус и синус двоструког аргумента и половине аргумента, као и за трансформације производа у збир и обратно.

Такође се може показати да су функције косинус и синус периодичне са периодом $4p$. Доказ се изводи коришћењем формула за косинус и синус збира, па је тако:

$$\begin{aligned}\cos(x+p) &= -\sin x, & \sin(x+p) &= \cos x,\\ \cos(x+2p) &= -\cos x, & \sin(x+2p) &= -\sin x,\\ \cos(x+3p) &= \sin x, & \sin(x+3p) &= -\cos x,\\ \cos(x+4p) &= \cos x, & \sin(x+4p) &= \sin x.\end{aligned}$$

7. Функције косинус и синус су непрекидне на интервалу $(-\infty,+\infty)$.

Докажимо најпре следећу лему.

Лема. *Функција* $\cos x$ *је непрекидна у тачки* $x=0$.

Доказ. Како је $\cos 0=1$, треба да докажемо да је $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Пошто је у интервалу $(0,p)$ фунција $\cos x$ позитивна, опадајућа (лако се доказује) и ограничена, то постоји њен десни лимес у тачки $x=0$. На основу парности те функције следи да постоји и леви лимес у тој тачки и да су та два лимеса једнаки. Дакле, постоји $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$, означимо га са l.

Како функција $\cos x$ у интервалу $(0,p)$ опада и важи $\cos x>0$, то је $l\geqslant 0$. На основу једнакости $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ имаћемо

$$\lim_{x\to 0}\cos 2x=2\lim_{x\to 0}\cos^2 x-1,\quad \text{одакле је}\quad l=2l^2-1.$$

Последња квадратна једначина има једно ненегативно решење $l=1$, па је зато $l=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. ■

Последица. Функција $\sin x$ је непрекидна у тачки $x = 0$.

Доказ. Следи из основног идентитета $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ и једнакости $\sin 0 = 0$.

Теорема. *Функције* $\cos x$ *и* $\sin x$ *су непрекидне у свакој тачки* $x \in \mathbf{R}$.

Доказ. Треба доказати да је

$$\lim_{h\to 0} \cos(x+h) = \cos x \quad \text{и} \quad \lim_{h\to 0} \sin(x+h) = \sin x.$$

Из $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$ следи да је

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \cos(x+h) &= \cos x \lim_{h\to 0} \cos h - \sin x \lim_{h\to 0} \sin h \\ &= \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 \quad (\text{на основу леме}) \\ &= \cos x.\end{aligned}$$

Аналогно се доказује друга једнакост. ■

Тригонометријске функције тангенс и котангенс дефинишу се формулама

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Њихова својства се зато изводе на основу дефинисаних и изведених својстава функција $\cos x$ и $\sin x$.

Теорема (о јединствености). *За дато p не могу постојати два пара функција* $\cos x$ *и* $\sin x$ *које задовоавају услове* (I)–(IV).

Доказ. Треба доказати да (за дато $p > 0$), уколико постоје два пара функција $\cos x$ и $\sin x$, односно $\cos_1 x$ и $\sin_1 x$ које задовољавају услове (I)–(IV), онда мора да важи

$$\cos x \equiv \cos_1 x \quad \text{и} \quad \sin x \equiv \sin_1 x \qquad \text{за све } x \in \mathbf{R}.$$

1) Посматрајмо низ вредности аргумента

$$p, \quad \frac{p}{2}, \quad \frac{p}{2^2}, \quad \frac{p}{2^3}, \quad \ldots, \quad \frac{p}{2^n}, \quad \ldots$$

и докажимо да за те вредности аргумента важи једнакост $\cos x = \cos_1 x$.

На основу услова (IV) имамо да је $\cos p = 0$ и $\cos_1 p = 0$. Применом формуле за половину аргумента

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad (0 < x < p)$$

добићемо да је $\cos \frac{p}{2} = \cos_1 \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{p}{2^2} = \cos_1 \frac{p}{2^2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ и у општем случају

$$\cos \frac{p}{2^n} = \cos_1 \frac{p}{2^n} = \frac{s_n}{2},$$

где је $s_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$, што се доказује математичком индукцијом.

На сличан начин се доказује да је

$$\sin\frac{p}{2^n}=\sin_1\frac{p}{2^n}=\frac{\sqrt{2-s_{n-1}}}{2}.$$

2) Нека је $m\in\mathbf{Z}$ а $n\in\mathbf{N}$. Докажимо да су у тачкама $\frac{m}{2^n}p$ вредности функција $\cos x$ и $\cos_1 x$, односно $\sin x$ и $\sin_1 x$, једнаке. Доказ ћемо извршити математичком индукцијом.

За $m=1$ доказано је у случају 1) да је

$$\cos\frac{p}{2^n}=\cos_1\frac{p}{2^n}\quad\text{и}\quad\sin\frac{p}{2^n}=\sin_1\frac{p}{2^n}.$$

Претпоставимо да су функције једнаке за неко m и докажимо то и за $m+1$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{m+1}{2^n}p&=\cos\Big(\frac{m}{2^n}p+\frac{p}{2^n}\Big)=\cos\frac{m}{2^n}p\cos\frac{p}{2^n}-\sin\frac{m}{2^n}p\sin\frac{p}{2^n}\\&=\cos_1\frac{m}{2^n}p\cos_1\frac{p}{2^n}-\sin_1\frac{m}{2^n}p\sin_1\frac{p}{2^n}=\cos_1\frac{m+1}{2^n}p.\end{aligned}$$

Слично се доказује за функције $\sin x$ и $\sin_1 x$. На основу принципа математичке индукције закључујемо да тврђења важе за произвољан природан број m.

За $m=0$ имамо

$$\cos\frac{m}{2^n}p=\cos_1\frac{m}{2^n}p=1,\qquad\sin\frac{m}{2^n}p=\sin_1\frac{m}{2^n}p=0.$$

Нека је $m<0$ ($m\in\mathbf{Z}$). Тада на основу парности косинуса важи

$$\cos\frac{m}{2^n}p=\cos\frac{-m}{2^n}p=\cos_1\frac{-m}{2^n}p=\cos_1\frac{m}{2^n}p.$$

Слично се добија за синус, на основу његове непарности.

3) Нека је x произвољан реалан број. Довољно је доказати да је $\cos x=\cos_1 x$ и $\sin x=\sin_1 x$ за случај $x>0$. Представимо однос $\frac{x}{p}$ у бинарном запису,

$$\frac{x}{p}=p_0+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\cdots+\frac{p_n}{2^n}+\cdots\quad\text{односно}\quad x=p_0p+\frac{p_1}{2}p+\cdots+\frac{p_n}{2^n}p+\cdots,$$

где је p_0 цео број, а $p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$ су такви да је $p_k=0$ или је $p_k=1$. Ако је запис коначан, на пример, $p_n\neq 0$ и $p_{n+1}=p_{n+2}=\cdots=0$, онда је број x облика $\frac{m}{2^n}p$, па је за њега тврђење доказано у случају 2).

Претпоставимо да је запис бесконачан. Нека је $x_n=p_0p+\cdots+\frac{p_n}{2^n}p$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. На основу непрекидности разматраних функција (својство 7) следи $\cos x=\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ и $\cos_1 x=\lim\limits_{n\to\infty}\cos_1 x_n$. Но како је $\cos x_n=\cos_1 x_n$, то је

$$\cos x=\lim_{n\to\infty}\cos x_n=\lim_{n\to\infty}\cos_1 x_n=\cos_1 x.$$

За функције $\sin x$ и $\sin_1 x$ тврђење се доказује на сличан начин. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Новоселов, *Специальный курс тригонометрии*, Высшая школа, Москва, 1967.
2. В. Мићић, С. Огњановић, Ж. Ивановић, *Математика за II разред средње школе*, Завод за издавање уџбеника, Нови Сад, 1991.

Гимназија „Бора Станковић“, Бор
E-mail: milicevici@verat.net