Мр Милан Живановић

ТРОУГЛОВИ СА ЦЕЛОБРОЈНИМ СТРАНИЦАМА И УНУТРАШЊИМ УГЛОМ ОД 60° (120°)

У радовима [2] и [3] показано је како се применом линеарне трансформације

$$
\begin{aligned}
a &= m+p\\
b &= n+p\\
c &= m+n+p
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где су a, b, c и m, n, p природни бројеви, могу решити проблем Питагориних тројки и неки специјални случајеви Велике Фермаове теореме. Ту ефикасну трансформацију искористићемо у овом раду за одређивање троуглова са целобројним страницама којима је један од углова 60°.

Дефиниција 1. Троугао коме су странице a, b и c природни бројеви, а средњи по величини угао једнак 60°, зваћемо $\pi/3$-троуглом, а одговарајућу тројку бројева (a, b, c) $\pi/3$-тројком. Ако су бројеви a, b и c узајамно прости, кажемо да је одговарајући троугао (тројка) основни (основна). У супротном је изведени (изведена).

Тривијалну класу $\pi/3$-троуглова чине једнакостранични троуглови и они не спадају у основне. Потражимо неке класе основних разностраничних $\pi/3$-троуглова.

Нека су $a < b < c$ целобројне странице троугла и нека је угао $\beta = 60°$. Поделимо странице троугла на одсечке $m = c - b$, $n = c - a$ и $p = a + b - c$ према трансформацији инверзној трансформацији (1). Применом косинусне теореме за страницу b добијамо једнакост

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac.$$

Када на ту једнакост применимо трансформацију (1), после неколико алгебарских трансформација имамо да је $2mp + m^2 + mn - np = 0$, односно

$$p = \frac{m(m+n)}{n-2m}. \tag{2}$$

Контрапозицијом се лако доказује да су бројеви a, b, c узајамно прости акко су и бројеви m, n, p узајамно прости.

Најједноставније решење се добија ако је именилац у формули (2) једнак 1, тј. ако је $n = 2m + 1$ и $m \in \mathbf{N}$. Тада добијамо да је $p = m(3m + 1)$, па је једна класа основних $\pi/3$-троуглова задата формулама:

$$\begin{aligned} a &= m + m(3m+1) = m(3m+2), \\ b &= 2m + 1 + m(3m+1) = 3m(m+1) + 1, \\ c &= m + 2m + 1 + m(3m+1) = (3m+1)(m+1), \end{aligned} \tag{3}$$

односно као уређена тројка

$$(3m^2 + 2m,\ 3m^2 + 3m + 1,\ 3m^2 + 4m + 1). \tag{4}$$

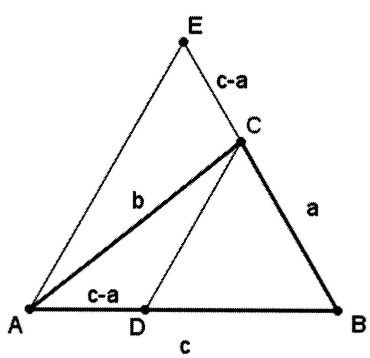
У табели 1 је представљено првих 10 чланова те класе. Троуглови су оштроугли јер је $a^2 + b^2 - c^2 > 0$.

m	n	p	a	b	c
1	3	4	5	7	8
2	5	14	16	19	21
3	7	30	33	37	40
4	9	52	56	61	65
5	11	80	85	91	96
6	13	114	120	127	133
7	15	154	161	169	176
8	17	200	208	217	225
9	19	252	261	271	280
10	21	310	320	331	341

Табела 1

Анализирајмо на слици 1 троугао ABC за случај $m = 1$. Тројка његових страница је $(a, b, c) = (5, 7, 8)$.

Одредимо тачку E на продужетку странице BC тако да је $BE = c$ и тачку D на страници AB тако да је $BD = a$. Пошто је угао у темену B једнак $60°$, лако се уочава да су троуглови ABE и BCD једнакостранични. Са слике се такође лако уочава да је AEC троугао са целобројним страницама $(3, 7, 8)$ и углом од $60°$ код темена E. Уопште, из $\pi/3$-тројке (a, b, c) може се добити $\pi/3$-тројка $(c - a, b, c)$, која полазни троугао допуњује до једнакостраничног.



Сл. 1

Дефиниција 2. Суплементним троугловима (тројкама) назваћемо два $\pi/3$-троугла (две тројке) који се допуњују до једнакостраничног троугла.

Класи (4) $\pi/3$-троуглова суплементна је класа

$$(2m+1,\ 3m^2+3m+1,\ 3m^2+4m+1). \tag{5}$$

Првих 10 елемената те класе дато је у табели 2.

m	$c-a$	b	c
1	3	7	8
2	5	19	21
3	7	37	40
4	9	61	65
5	11	91	96
6	13	127	133
7	15	169	176
8	17	217	225
9	19	271	280
10	21	331	341

Табела 2

Ако из троугла ABC исечемо једнакостранични троугао BCD, добија се троугао ADC коме странице чине целобројну тројку $(3,5,7)$ а унутрашњи угао код темена D је једнак $120°$.

Дефиниција 3. Троугао са целобројним страницама и једним углом од $120°$ зваћемо $2\pi/3$-троугао.

Из досада реченог је јасно да се сваки оштроугли $\pi/3$-троугао може разложити на један једнакостранични и један $2\pi/3$-троугао. $2\pi/3$-троугао који се на овај начин добија из $\pi/3$-троугла (a,b,c) има облик $(c-a,a,b)$. За $\pi/3$-тројку облика (4) добија се $2\pi/3$-тројка

$$(2m+1, 3m^2+2m, 3m^2+3m+1). \tag{6}$$

Првих 10 чланова те класе представљено је у табели 3.

Потражимо опште решење једначине (2). Претпоставимо прво да је НЗД$(m,n)=d$. Тада је $m=kd$ и $n=ld$, $k,l\in\mathbf{N}$, $l-2k\geqslant 1$ и k и l су узајамно прости. У том случају једначина (2) се своди на једначину

$$p=\frac{k(k+l)d}{l-2k}. \tag{7}$$

Да би параметар p био природан и да бисмо добили основну $\pi/3$-тројку, p не сме садржати чинилац d. Стога је $l-2k=rd$, при чему је r природан чинилац од k или $k+l$.

m	$c-a$	a	b
1	3	5	7
2	5	16	19
3	7	33	37
4	9	56	61
5	11	85	91
6	13	120	127
7	15	161	169
8	17	208	217
9	19	261	271
10	21	320	331

Табела 3

I. Ако је $r=1$, тада је $l-2k=d$, па су $m=kl-2k^2$, $n=l^2-2kl$ и $p=k^2+kl$, а одговарајућа $\pi/3$-тројка је

$$a=2kl-k^2,\quad b=k^2-kl+l^2,\quad c=l^2-k^2, \tag{8}$$

уз услове $l\geqslant 2k+1$ и $l+k$ није дељиво са 3.

II. Ако је $r>1$, $l-k=rd$ и $k=rs$ $(d,s\in\mathbf{N})$, имаћемо и да је l дељиво са r, што је у супротности са претпоставком да су k и l узајамно прости.

III. У случају $r>1$ и $l-2k=rd$, $k+l=rs$, решавањем по k и l добија се

$$k=\frac{(s-d)r}{3},\quad l=\frac{(2s+d)r}{3}.$$

Потребан услов да би k и l били узајамно прости је $r=3$ и да s и d имају различите остатке при дељењу са 3. У том случају је $k=s-d$ и $l=2s+d$, па је: $m=sd-d^2$, $n=2sd+d^2$, $p=s^2+2sd$, уз услов $s>d$ и $s-d\not\equiv 0 \pmod 3$. На крају, уз постављене услове добијамо тројку

$$a=s^2-d^2,\quad b=s^2+sd+d^2,\quad c=s^2+2sd. \tag{9}$$

Ако за тројку (a,b,c) важи $a^2+b^2-c^2>0$, троугао је оштроугли, а у случају $a^2+b^2-c^2<0$, имамо тупоугли $\pi/3$-троугао. У оба случаја ће тројка $(c-a,b,c)$ бити суплементна тројци (a,b,c). Одговарајућа $2\pi/3$-тројка је $(c-a,a,b)$ ако је (a,b,c) оштроугли троугао, односно $(a,c-a,b)$ ако је троугао $(c-a,b,c)$ оштроугли.

Пример 1. Користећи формуле (8) за $k=3$ и $l=8$ добијамо $\pi/3$-троугао са страницама $a=39$, $b=49$ и $c=55$ који је оштроугли, јер је $a^2+b^2-c^2=897>0$.

Њему суплементан је троугао са страницама $(16, 49, 55)$, а одговарајућа $2\pi/3$-тројка је $(16, 39, 49)$.

Пример 2. Користећи формуле (9) за $s = 11$ и $d = 9$ имамо $\pi/3$-тројку $(40, 301, 319)$. Троугао са тим страницама је тупоугли, њему суплементна тројка је $(279, 301, 319)$, а одговарајућа $2\pi/3$-тројка је $(40, 279, 301)$.

Ослањајући се на особине суплементних троуглова, напоменимо још да је уместо услова $a^2+b^2-c^2 > 0$, за оштроугли $\pi/3$-троугао, једноставније користити услов $a > c - a$, тј. $2a > c$.

Задаци за вежбање

1. За сваку од формула (8) и (9) одредити по две тројке, њима суплементне тројке и одговарајуће $2\pi/3$-тројке.

2. Доказати да је средњи члан $\pi/3$-тројке већи или једнак од аритметичке средине друга два члана.

3. Доказати да не постоји правоугли $\pi/3$-троугао.

4. Доказати да ниједан $\pi/3$-троугао није Херонов.

5. Доказати да су полупречници описане и уписане кружнице $\pi/3$-троугла ирационални.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Barnes, *Pythagorean triples, etc.*, `http://www.geocities.com/fredlb37/triples.html`
2. М. Живановић, *Инваријантна пресликаваа Питагориних тројки*, Настава математике L, 1–2, ДМС, Београд, 2005.
3. М. Живановић, *Примена једне линеарне трансформације код Велике Фермаове теореме*, Настава математике LIII, 3–4, ДМС, Београд, 2008.

Техничка школа, Бајина башта

E-mail: `milanzibb@sezampro.yu`