Др Владимир Јанковић

ДАРБУОВА ТЕОРЕМА

Циљ овог чланка је да се изложи неколико занимљивих и лепих доказа Дарбуове теореме (G. Darboux).

Теорема. *Ако функција f има извод у свакој тачки интервала $[a,b]$, онда изводна функција f' узима све вредности које леже између $f'(a)$ и $f'(b)$.*

Напомена. Под изводом у тачки a подразумевамо десни извод а у тачки b леви извод; означавамо их једноставно са $f'(a)$ и $f'(b)$.

У књизи [1] ова теорема је добила име по француском математичару Дарбуу. Доказана је помоћу Фермаове теореме. Ево тог доказа:

Први доказ. Претпоставимо прво да су изводи $f'(a)$ и $f'(b)$ различитог знака и докажимо да се у некој тачки c, која лежи између a и b, извод функције f анулира. Нека је нпр. $f'(a) < 0 < f'(b)$. Како је функција f непрекидна на затвореном интервалу $[a,b]$, према Вајерштрасовој теореми она достиже минимум у некој тачки c тог интервала. Из $f'(a) < 0 < f'(b)$ добијамо да је $c \neq a, b$, тј. да је $a < c < b$. Према Фермаовој теореми имамо да је $f'(c) = 0$.

Размотримо сада општи случај. Нека је λ број који лежи између $f'(a)$ и $f'(b)$, дакле такав да је или $f'(a) < \lambda < f'(b)$ или $f'(a) > \lambda > f'(b)$. Функција φ задата са $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$ има извод у свакој тачки интервала $[a,b]$, $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$. У тачкама a и b извод функције φ има вредности различитих знакова. Зато постоји такав број c, $a < c < b$, да је $\varphi'(c) = 0$, тј. да је $f'(c) = \lambda$. ■

У домаћем уџбенику [2] дат је у суштини исти доказ ове теореме. У књизи [3] изложен је другачији доказ ове теореме, који се ослања на Лагранжову теорему о средњој вредности. Ево тог доказа:

Други доказ. Нека је λ број који лежи између $f'(a)$ и $f'(b)$, дакле такав да је или $f'(a) < \lambda < f'(b)$ или $f'(a) > \lambda > f'(b)$. Функције α и β дефинишемо са $\alpha(t) = a$ и $\beta(t) = 2t - a$ за $a \leqslant t \leqslant c$, и $\alpha(t) = 2t - b$ и $\beta(t) = b$ за $c \leqslant t \leqslant b$, где је $c = (a+b)/2$. Имамо да је $a \leqslant \alpha(t) < \beta(t) \leqslant b$ за $t \in (a,b)$. Нека је

$$g(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}, \quad a < t < b.$$

Функција g је непрекидна на (a,b). Имамо да $g(t) \to f'(a)$ када $t \to a$ и $g(t) \to f'(b)$ када $t \to b$. На основу Болцано-Кошијеве теореме закључујемо да постоји

$\tau \in (a,b)$, за које је $g(\tau) = \lambda$, а на основу Лагранжове теореме о средњој вредности закључујемо да постоји такав број γ, $\alpha(\tau) < \gamma < b(\tau)$, да је $f'(\gamma) = g(\tau) = \lambda$. ■

Претходни доказ је кратак и ефектан. На први поглед конструкција помоћне функције g која се користи у овом доказу, делује необично и намеће се питање којом се идејом може доћи до ње. Покушаћемо да одговоримо на то питање.

Трећи доказ. Означимо са A скуп вредности које подељена разлика
$$f(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$
узима на скупу $\Delta = \{(x,y) \mid a \leqslant x < y \leqslant b\}$, а са B скуп вредности које функција f' узима на интервалу $[a,b]$. Према Лагранжовој теореми о средњој вредности, за пар $(x,y) \in \Delta$ постоји z у интервалу (x,y), за које важи $f(x,y) = f'(z)$. Зато је $A \subseteq B$. Из $f'(x) = \lim_{y\to x} f(x,y)$ добијамо да је $B \subseteq \operatorname{cl} A$. Како је функција $f(x,y)$ непрекидна и како је скуп Δ повезан, то је и скуп А повезан. Према тврђењу који се може наћи у многим књигама из опште топологије, из чињеница да је скуп A повезан и да је $A \subseteq B \subseteq \operatorname{cl} A$, следи да је и скуп B повезан. Зато скуп B заједно са тачкама $f'(a)$ и $f'(b)$ садржи и све тачке које леже између њих. ■

Претходни доказ је прилично јасан, али се у њему користе неке чињенице које нису познате студентима прве године студија, који су тек почели да уче Математичку анализу. Студент који је тек почео да учи Математичку анализу не зна шта су то повезани скупови и не зна да непрекидна функција више променљивих на повезаном скупу са сваке две вредности узима и све међувредности. Студент зна само Болцано-Кошијеву теорему која тврди да непрекидна функција на интервалу реалне праве са сваке две вредности узима и све међувредности. Због тога ћемо претходни доказ модификовати тако да за њега, од чињеница које се односе на повезаност, буде довољна само поменута Болцано-Кошијева теорема. То ћемо урадити тако што ћемо уместо скупа Δ разматрати криву линију Γ, чије унутрашње тачке леже у Δ и која има својство да вредност подељене разлике $f(x,y)$ тежи вредностима $f'(a)$ и $f'(b)$, када њен аргумент дуж те криве тежи њеним крајевима.

Четврти доказ. Нека је λ број који лежи између $f'(a)$ и $f'(b)$, дакле такав да је или $f'(a) < \lambda < f'(b)$ или $f'(a) > \lambda > f'(b)$. Нека је Γ крива линија чије унутрашње тачке леже у скупу $\Delta = \{(x,y) \mid a \leqslant x < y \leqslant b\}$, чији су почетак и крај тачке (a,a) и (b,b), и која у тачкама (a,a) и (b,b) додирује одговарајуће катете троугла Δ. Нека је $(\alpha(t),\beta(t))$, $t \in [0,1]$, параметризација те криве. То значи да су функције $\alpha,\beta\colon [0,1] \to R$ такве да је $a \leqslant \alpha(t) < \beta(t) \leqslant b$ за $t \in (0,1)$, $\alpha(0) = \beta(0) = a$, $\alpha(1) = \beta(1) = b$, $\alpha'(0) > 0$, $\beta'(0) = 0$, $\alpha'(1) = 0$, $\beta'(1) > 0$. Нека је функција $g\colon [0,1] \to R$ задата са $g(t) = f(\alpha(t),\beta(t))$, где је $f(x,y)$ подељена разлика функције f. Функција g је непрекидна и задовољава услове:
$$\lim_{t\to 0+} g(t) = f'(a), \qquad \lim_{t\to 1-} g(t) = f'(b).$$
Према Болцано-Кошијевој теореми постоји такво $\theta \in (0,1)$, да је $g(\theta) = \lambda$. Према Лагранжовој теореми о средњој вредности постоји број γ, $\alpha(\theta) < \gamma < \beta(\theta)$, за који важи да је $f'(\gamma) = g(\theta) = \lambda$. ■

Други доказ је заправо варијанта четвртог доказа у којој се, уместо апстрактно описане криве Γ користи крива која се састоји од катета троугла Δ. Ево још једне варијације ове идеје. У доказу који следи користи се иста крива која је коришћена у другом доказу, али је реализација друкчија.

Пети доказ. Нека је λ број који лежи између $f'(a)$ и $f'(b)$, на пример нека је $f'(a) < \lambda < f'(b)$.

Размотримо случај када је

$$f(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \geqslant \lambda.$$

Како је функција $g(x) = f(x,a)$ непрекидна на интервалу $(a,b]$, и како је $\lim_{x\to a} g(x) = f'(a) < \lambda \leqslant f(a,b) = g(b)$, према Болцано-Кошијевој теореми постоји такво c, $a < c \leqslant b$, да је $f(a,c) = g(c) = \lambda$. Према Лагранжовој теореми о средњој вредности закључујемо да постоји такво $\gamma \in (a,c) \subseteq (a,b)$, да је $f'(\gamma) = f(a,c) = \lambda$.

Случај када је

$$f(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leqslant \lambda,$$

разматра се на сличан начин. ■

Дарбуова теорема има две важне последице.

Последица 1. *Нека је реална функција f диференцијабилна на отвореном подскупу G скупа реалних бројева R. Функција f не може имати прекиде прве врсте на скупу G.*

Последица 2. *Нека је реална функција f диференцијабилна на отвореном подскупу G скупа реалних бројева R. Функција f пресликава интервале садржане у G у интервале реалне праве.*

На крају наводимо задатак број 4 из параграфа 8.4 књиге [4], који показује да не постоји аналогон Дарбуове теореме за векторске функције реалне променљиве.

Задатак. Нека је функција $f\colon (-1,1) \to R^2$ задата са $f(t) = (0,0)$ за $-1 < t \leqslant 0$ и $f(t) = (t^2\cos(1/t), t^2\sin(1/t))$ за $0 < t < 1$. Доказати да је функција f диференцијабилна у свакој тачки интервала $(-1,1)$, али да изводна функција f' тај интервал пресликава у скуп који није повезан.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления I*, Наука, Москва, 1969.
2. Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа I*, Математички факултет, Београд, 2008.
3. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, San Francisco, Toronto, London, 1964.
4. J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London, 1969.

Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд

E-mail: vjankovic@matf.bg.ac.yu