НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LIV, 2–3 (2009), 1–11

Др Даниел А. Романо

О ГЕОМЕТРИЈСКОМ МИШЉЕЊУ

Увод

Академик Григорије Давидович Глејзер у свом раду „Геометрија у школи" објављеном у часопису Настава математике, XLII (1996), наводи сљедеће: „Недавно сам разговарао са својим суседом, окретним и радозналим учеником седмог разреда основне школе. Он је изјавио да је предмет који у школи најмање воли геометрија. На моје питање, шта раде у школи на часовима геометрије, уследио је одговор: „Доказујемо теореме". Када сам га замолио да докаже неку од тих, он је безуспешно покушавао да изведе теорему о збиру углова у троуглу. Затим је прешао на лакшу теорему о једнакости углова налеглих на основи једнакокраког троугла. Али и ту је доживео неуспех, пошто није могао да објасни да ли је троугао ABC подударан троуглу BCA. „Зар вам то није јасно?", рекао је и наставио „па са леве и десне стране је исти троугао. Мени је и овако јасно, али наставница ипак тражи да се нешто доказује." Ово није шала. Питајте било ког ученика који је почео да учи геометрију и он ће рећи скоро исто. Опште је позната чињеница да већина ученика нема интерес за геометрију, а знање овог предмета се налази на недопустиво ниском нивоу. О томе говоре и наставници и професори на факултетима и сами ученици." Из ове мале анегдоте је видљиво колико је потребан другачији приступ у предавању геометрије.

Парадигме: Природно, интуитивно, формално, аксиоматски

Историја геометрије је обиљежена са два, на неки начин контрадикторна тренда. Са једне стране, геометија користи и тражи помоћ у копирању ситуација из реалног и будућег живота. Са друге стране, након објављивања Еуклидових Елемената, геометрија је више од двије хиљаде година прототип логичко-математичког мишљења.

У овом раду ће бити изнесена мишљења методичара геометрије у самом концепту предавања геомерије у основној и средњој школи и образовњу будућих наставника математике.

Горе наведена контрадикторна перспектива се на неки начин огледа и у дискусији Houdement-а и Kuzniak-а [21], [22] који, слиједећи Gonseth-а [15], разликују три приступа разумјевања геометрије:

- Природна геометрија (*Геометрија I*), која има реалан и осјећајан свијет за поријекло извора непобитности. У овој геометрији, тврђења се оправдавају кориштењем аргумената базираних на експерименту и дедукцији.
- Природно-аксиоматска геометрија је архетип класичне Еуклидске геометрије. Ова геометрија (*Геометија II*) изграђена је на моделу блиском реалности, аксиоми су што је могуће блискији интуицији.
- Када су аксиоми фиксирани, захтијева се да демонстрација тврђења буде заснована на аксиоматском систему, што је неопходно за довођење у формалну аксиоматску геометрију (*Геометрија III*) која је мало представљена у обавезном школовању. На овом нивоу су студенти који студирају математику и који су упознати са формалним и логичким закључивањем.

Сагледавајући геометрију са овог становишта можемо пронаћи метод класификације геометријског мишљења. Овај метод ће нам помоћи при интерпретацији задатака датих ученицима, такође га можемо искористити за класификацију резултата ученика, а наставници га могу користити као помоћ при оријентацији у предавању геометрије. Овим се може ублажати граница између учениковог и наставниковог свијета (бар до одласка на студије) и такође се уклањају препреке између линеарне алгебре / аналитичке геоиметрије које су тако често далеко од геометријског свијета да их студенти не доживљавају као дио геометрије. Ова три принципа такође доводе до питања да ли су наставници у средњој школи компетентни да разумију геометрију на нивоу Геометрија III.

Van Hiele-ова теорија о нивоима разумјевања геометрије

Осим овог приступа имамо и важне теоретске радове усмјерене на предавање и учење геометрије засноване на такозваним „Van Hiele-овим нивоима“, које наводимо:

Ниво 0 је ниво *визуелизације*. Ученици на том нивоу искључиво на основу перцепције базирају своје мисли и на основу њих доносе одлуке, без познавања било каквог разлога. Они су у стању да препознају геометријске ликове као што су троугао, четвороугао или круг и да уоче њихове особине, али их не користе за препознавање и класификацију.

Ниво 1 је ниво *анализирања*. Ученици почињу да идентификују особине ликова и уче како да на правилан начин опишу повезаност особина, али не праве везе између различитих облика и њихових особина. Споредне особине, као што су величина или орјентација, постају мање важни, јер ученици су вјешти да се фокусирају на облик унутар класе. У могућности су да промишљају која својства има правоугаоник. Ученици су на овом нивоу способни да разговарају о односима између ликова и њихових особина. Када описују неки објекат, размишљајући на овом нивоу, они набрајају све његове особине, али не могу да разграниче које су од њих потребне а које довољне да га опишу. Они могу да изводе закључке индуктивно на основу неколико примјера, али јос увијек не могу да користе дедукцију.

Ниво 2 је ниво *апстракције*, или како га неки називају, ниво *неформалне дедукције*. Ученици спознају односе међу особинама геометријских облика и на основу тога односе међу самим геометријским облицима. Почињу размишљати дедуктивно али не разумију, још увијек, правило и значење формалне дедукције. На овом нивоу ученици почињу да размишљају о томе шта је потребно а шта довољно да се неки геометријски лик опише.

Ниво 3 је ниво *дедукције*. Ученици могу идентификовати особине ликова, конструисати доказе користећи исказе, аксиоме и дефиниције. Типични средњошколски курсеви геометрије могу да се организују на овом нивоу. Ученици су у могућности да употребљавају апстрактне појмове и да изводе закључке који су засновани више на логици него на интуицији.

Ниво 4 су назвали ниво *строгости*. На овом нивоу ученици су у могућности да разумију конзистенстност, независност и комплетност аксиоматског система, и да пореде математичке системе. Такође, могу да разумију индиректно доказивање, доказивање корисцењем контрапозиције, те да разумију геометријске системе који нису Еуклидски (као што је нпр. систем геометрије Лобачевског код које су геометријски ликови смјештени на сферу а не у раван као код Еуклидске геометрије). На овом нивоу се раде курсеви из геометрије на факултету.

Поријекло математичког мишљења

У свом чувеном чланку [29] из 2003. године о поријеклу математичког мишљења, Uri Leron је поставио питање „*Да ли је математико мишљење једна природна екстензија колективног смисла, или је то потпуно одвојена врста мишљења?*“ Наравно да су могући одговори на ово питање од посебног интереса ради теоријског сазнања али и из практичниг разлога. Теоријски, ово је важно питање као специјалан случај општег питања о томе како функционише мишљење. Практично, јасно је да одговор на горње питање има значајне едукативне импликације. Ослањајући се на истраживања Dehaene-а [5], Lakoff-а и Nunez-а [26], Devlina-а [6] и Cosmidese-а и Tooby-а [8], Uri Leron разлучује три нивоа математике: тзв. рудиментирана аритметика, информална математика и формална математика, свака са својим специфичним (различитим) механизмима мишљења. Специфичност овдје изнесеног мишљења је тврђење да се свако људско биће рађа са неким рудиментираним знањем математике:

1. Са три или четри дана беба може правити разлику између колекције од два и колекције од три објекта.

2. Са четри и/или пет мјесеци беба 'може рећи' да је један више један једнако два као и да је два минус један једнако један.

3. Ове способности нису везане за способност гледања. Бебе могу такође разликовати број сигнала. Са три и/или четири дана бебе могу разликовати звукове од два од звукове од три гласа.

4. И, око седам мјесеци бебе могу распознавати нумеричке еквиваленције између низова објеката и звукова истог броја.

Регистри семиотичких репрезентација

Фигура, у смислу најопштијег објекта геометрије (или 2Д или 3Д), може бити представљена на много начина. Ми можемо разликоватитри главне групе семиотичких[1] репрезентација[2]:

- *материјална репрезентација* фигуре израђене од папира, пластелина, дрвета, картона;
- *нацртана репрезентација* (користећи се папиром и оловком, компјутером употребљавајући геометријски софтвер); и
- *дискурзивна репрезентација* -- репрезентција логичког закључивања која описује фигуре користећи помијешано и природни и формални језик.

Сваки попис носи своју интерну функцију, са правилима која су мање или више експлицитна. Како год, студенти се пребацују из једног регистра у други, понекад експлицитно, понекад имплицитно, а понекад назад и напријед.

Питања о регистрима семиотичких репрезентација и когнитивних процеса највише је проучавао Duval [12]. Он наводи (дефинише): „семиотичка репрезентација је производ направљен да користи обиљежја која припадају систему репрезентација при чему има властита ограничења разумијевања и функционисања". Семиотичке репрезентације су неопходне у математичким активностима, будући да се математички објекти не могу директно уочавати и, према томе, морају се представљати. Подвуцимо Duval-ово тврђење да: „семиотичке репрезентације нису само испољавање менталних репрезентација у комуникацији већ имају и нека суштинска својства за когнитивне активности мишљења". Он овдје разликује *semiosis* – сажимање или производња менталних репрезентација, од *noeisis* – концептуално сажимање неког обекта што одржава њихову неодјељиву битност. У когнитивне активности, укључујући семиосис, он наводи три типа активности:

- *формирање репрезентација*, које могу бити идентификоване као садржај датих регистара,
- *процесуирање и трансформација репрезентација* унутар регистрара у којима су креиране, и
- *конверзија*, тј. трансформација семиотичких репрезентација из једног регистра у други.

Посебно је важна трећа активност за описивање тако потребних пролаза за координацију регистара доданих у неки концепт. Чини се да су прве двије активности укључене у наставу математике, док се трећа угавном занемарује. Duval је

[1] Семиотика (грч. semeiotikos: који се обазире на знакове) јесте теорија о знаковима и симболима, односно проучавању начина на који функционирају знаковни системи. Употребом знакова, упућује се, наводи на нешто друго, што није непосредно замјетљиво. Посебно се бави језичким знаковима, односима између логике и језика, међуодносима разних знакова и односима између знакова те њихових значењских садржаја. Семиотика захтијева познавање различитих лингвистичких, филозофских и логичких система.

[2] Симболичка функција је специфична људска способност представљања помоћу симболичких средстава нечег другог што је различито од њих самих. Симболичка репрезентација је основна функција свијести. То је општа способност стицања и кориштења знакова, семиотичких система и извођења семиотичких операција.

показао да многе студентске потешкоће леже у њиховој неспособности за изведу конверзацију између регистара семиотичких репрезентација. Он такође тврди да је способност конверзације суштински услов за поимање и промишљање.

У другом тексту [13] Duval усмјерава свој рад на проучавање различитих путева функционисања фигура у геометрији. Он разматра четири типа разумјевања фигура.

Најдиректније је перцептивно разумијевање, које одмах допушта да се препознају форме објекта према гешталистичкој (парадоксална теорија промјене) организацији закона и унутрашњо-фигуралним индикаторима.

Неинтуитивно разумијевање је у потпуности једноставно, фигуре се виде кроз вербалан опис (нека је ABC троугао са правим углом код врха A, ...) који изричито јасно описују неку особину. У ствари, геометријске особине, дословно речено, очите или нацртане, морају бити дане у хипотези или закону и доказане помоћу дедукције.

Секвенцијално (серијско) размишљање усклађује кораке и њихов поредак, већ према томе која фигура треба бити конструисана. Ослања се на особине фигуре, али такође и на типове кориштених инструмената и слабости техничке ограничености. Активности најчешће користе и посредне конструкције и екстерне контроле, користећи модификовано знање о особинама које објекти презентују.

Оперативно разумијевање је највише компликовано.

Duval, као и Polya [31], предлаже двојно приказивање „идеја“ за рјешење проблема. Упориште налази у могућности модификације фигура (да се различити дијелови могу преуредити као пазле, мјењајуцу им величину, премјестајући их у нове позиције) .

Дидактичке потешкоће

Дидактичке потешкоће у сва четири модела размишљања, највише у задња три, играју врло различиту улогу у учењу геометрије. Како год, оне остају знатно независне и могућност њиховог премјештаја је ограничена. Упркос интензивном тренигу и предавању и низу савремених размишљања, нема трансфера компентенција и хеуристичког кориштења фигура, које би задовољиле оперативно разумјевање. Уствари, „ ... ово је хеуристички фигуративни процес који је независтан од конструисаних разложних активности, са друге стране он користи регистре фигура као средсво за репрезентацију процеса размишљања као форму што директнијег приступа. Ипак, овај фигурални процес може бити нејасан чак и врло тежак за разумјевање многим студентима.“

Разматрања питања о регистрима се налазе у многим радовима и наводимо неке од њих.

Теоретски модели утемељени на основу Houdement-ових и Kuzniak-ових специфичности користе фигуре и језик за сваки од три нивоа геометрије. Показују како нека фигура и неки вербални опис могу бити несхваћени на различитим нивоима, а и откривају на које се потешкоће наилази у разумијевању различитих модела представљања геометријских објеката.

Vighi [35], Acuña-Soto [1] и Larios-Osorio [28] допринијели су приказу да ученици имају недвојбене потешкоће у њиховим сликовитим репрезентацијама, чак и на перцетипном нивоу (троугао је најчешће виђен као једнакокраки). Штавише, Vighi је показала да се ријеч троугао односи на многе објекте из свакодневног живота тед а су ти објектио запрека за конструкцију концепта троугла.

Lanciano [27] се осврће на конструкцију инструмената. Мисао водиља њеног рада је да се направи репрезентација инструмената који су за студенте и оперативни и конструктивни. Она наводи хипотезу да оно што се може наслутити интелигенцијом представља веома продуктивну могућност.

Kurina [25] је заинтересован за хеуристичку снагу фигура у геометријском мишљењу. Његов рад садржи више примјерима снаге оперативног разумијевања фигура и ријешених проблема.

Cohen [3] и Baco [2] свој допринос овим разматрањима су дали у просторној репрезентацији. Они су указали на низ потешкоћа код студената у разумјевању визуализације међусобног односа тачака, правих, површи и равни. Њихов битан удио у разумјевању геометријског мишљења је презентација просторних објеката.

Битно је споменути и Guedet-Chartier-ину [16] заинтересованост за ово питање, то јест њену репрезентацију геомеријских објеката (цртежи највише) и концепт линеарне алгебре. Користећи Fischbein-ову теорију[3], она је презентовала да студенти имају велике потешкоће у кориштењу фигура због интуитивне базе и апстрактног концепта. Она, такође, истиче варијације интерпретација самог цртања које може представити различите ситуације у геометрији и у линеарној алгебри.

У Rolet-ином експерименту [33] исти задатак је понуђен на три различита начина. У сваком нивоу је регистар репрезентација различит и приказује учинковите акције студената током рјешавања.

Коначно, Perrin-Glorian-ин експеримент [30] показује потешкоће ученика које имају у представљању цртежа у равни чији је неки дио избрисан. Они морају надвладати перцептивни ниво и порадити да достигну ниво закључивања у репрезентацији фигура неопходних за редосљед испуњавања задатка.

Истакнимо сада неке сугестије када користити приручни материјал, компјутер и начине њиховог кориштења. Кориштење дидактичког материјала је врло конвенционално и у основној и у средњој школи. Постоји много литературе која приказује континуиран труд одређених математичких едукатора кроз дуг период истраживања, предавања и учења геометрије помоћу манипулације компјутером

[3] Теорија разумне акције или теорија разумног дјеловања (The theory of reasoned action) је конструкт два аутора – I. Ajzen-а и M. Fishbein-а 1975. и 1980. По ауторима теорије добровољно понашање особе зависи од његовог/њеног става према радњи и субјективног става о истој. Субјективан став или норма је у суштини перцепција реакције и мишљења других о радњи. Заједно ова два фактора доводе до намјере о понашању односно делању у крајњој инстанци (Понашање = Став + Субјективне норме). Аутори истичу да ефекат субјективних норми на понашање индивидуе зависи од значаја који особа приписује мишљењу других (ако некој индивидуи није стало до мишљења других, та особа неће ни разматрати субјективне норме при доношењу одлуке). Практично за сваку особу би требало утврдити који је интезитет субјективних норми, а који става при процјени да ли ће та индивидуа учинити нешто.

и другим алатима. На почетку седамдесетих осјећа се доминантност „модерне математике“, појављују се математички едукатори попут Z.P. Dienes-a [7], [9]. Он описује парадигме у „модерној математици“, процесе учења апстрактних математичких концепата и структура на дјечијем узрасту. Он све ове процесе и парадигме обједињује у четири принципа за учење математике (динамички принцип, перцептивно-варијабилни принцип, математички варијабилни принцип, конструктивни принцип) и шест етапа учења матемаике (слободно играње, играње по правилима, упоређивање, презентовање, симболизација, формализација). Према Диенес-у дјеца уче математику играјући структуиране игре и користећи манипулативне алате као фундаменталне дијелове у прва два принципа и у прве три етапе.

Van Hieli-јеви нивои наглашавају важност кориштења инструмената,у складу са моделом и са обзиром да дјечје закључивање на првом, другом и трећем нивоу захтјева физичке објекте, инструменте или слике које им помажу да ријеше задатак и организују своје размишљање.

- Дјеца на првом нивоу (ниво 0, у Kuzniak и Haudment-овој нотацији) уочавају геометријске објекте као физичке идентитете, дакле они уче геометрију само у интеракцији са реалним објектима, сликама, итд.

- Дјеца на другом нивоу су способна да истражују и генерализују особине у геометријском концепту на основу индуктивног закључивања из њихових опажања и више примјера, користе инструменте и цртеже као бау за ток размишљања.

- Дјеца на трећем нивоу почињу са стварају апстрактне дедуктивне закључке, али још увијек требају конкретне репрезентације (компјутерско предочавање, слике, цртежи, физички објекти) да могу организовати своје дедуктивне аргументе.

У свом раду [14] Duval описује предавање и учење геометрије у односу на когнитивну страну и подразумјева три когнитивна нивоа од којих сваки има своје специфичности:

- визуализација тражи репрезентацију у дводимензионалном и тродимензионаном простору;

- конструкција модела који репрезентују геометријске стуктуре

- закључивање које се заснива на организованом опису или аргументованој расправи.

За обављање визуализације и конструкције ученици морају манипулисати инструментима, исцртавати слике на папиру или помоћу рачунара. Такође неки типови процеса закључивања, не морају бити у потпуности апстрактни, ученици могу, да би донијели закључке, користити инструменте како би створили основу за закључивање.

Врло је интересантан рад Bako која је експериментисала са предавањима у основној школи, радећи са неколико типова репрезентације тродимензионалног простора, желећи да установи да ли је неки од њих погоднији од другог. Наиме, она је упоређивала корисност аксинометријског, централног или ортогоналног пројектовања да ријеши проблем проналска подударних, али различитих начина за пресијецање коцке различитим равнима добијен помоћу или транспарентног модела коцке или помоћу специфичног компјутерског програма. Бако је закључила да је комјутер ефикаснији у проналажењу различитих пресијецања, док су манипулативни модели далеко кориснији у проналажењу начина за добијена пресијецања.

Важно је да споменемо и рад N. Lanciano. Она је усмјерила своју пажњу да обучи будуће учитеље да користе и конструктивност и манипулативност у својим предавањима. У овом експерименту она је захтијевала од будућих наставника да направе различите класичне рукотворине користећи уочене тачке у простору.

Rolet-ини радови показују неопходност узајамне повезаности између „радног простора“ студентских радова и инструмената које користе. Њен експеримент је проведен на дјеци основношколског узраста који су из даног материјала требало да направе четири различите коцке у различитим „радним просторима“ (под, велики комад папира, мали комад папира, програмски језик Cabrio). Мјењајући величину радног простора и инструмената ученицима, увидјела је да им ово помаже да се са нивоа осјећајног простора (извођењем опипљивих геометријских експеримената) пребаце у геометријски простор (апстрактна геометрија).

Просторна геометрија

Просторна геометрија је увијек тежак предмет, како у обавезном школовању, тако и на факултетима у свакој земљи. Са једне стране, тродимензионални објекти су дио нашег свакодневног живота, али са друге стране, њих најчешће представљамо помоћу дводимензионалних слика. Заиста наше разумијевање тродимензионалне геометрије је у тијесној повезаности са разумијевањем дводимензионалне геометрије. Како год, у неким случајевима, несугласица између нашег познавања геометријског простора и нашег интуитивног поимања простора може бити коријен дубоком неразумјевању. О овом питању наилазимо неколико радова, а посебно истичемо сљедеће.

У свом раду Doan Huu [10] истиче да су многи студенти природно надарени да трансформишу теореме из дводимензионалне геометрије у тродимензионалну геометрију. У раду се истиче јака тенденција да, користећи се аналогним размишљањем, студенти реалне потешкоће суоче теоремама које знају у дводимензионалној геометрији са њиховим интуитивним поимањем простора. Ако студенти не могу да изграде схватање теорема у дводимензионалној геометрији независно од њеног фигуративног представљања и приказа, имаће проблеме схватања. У суштини врло је тешко пребацивање из дводимензионалног у тродимензионално имајући као основу фигуративну транспозицију. За ово је потребна већа концептуална позадина. За разумијевање тродимензионалне геометрије главну улогу има опет расвјетљавање нашег знања из дводимензионалне геометрије и одређене отворености, на још очитији, можда круцијалнији приказ објеката.

Cohen-ин рад [3] дијели овај проблем на питања о релацијама између тачака, правих, равни и простора. Она је експериментисала са процесом подучавања са конкретним манипулативним објектима изграђеним од пластелина и пластике, потичући студенте да тродимензионалне предмете виде као реалне објекте.

Bako је своје интересовање о овом проблему усмјерила на репрезентацију равни као тродимензионалног објекта. У том смислу, она тврди да се централна пројекција може корисити као алтернатива аксонометријској пројекцији. Дакле, она је правила експерименте користећи компјутерски софтвер и конкретне објекте да би закључила да ни један од два типа репрезентације (било аксонометријска или централна пројекција) не даје боље резултате. Уистину студенти имају често велике потешкоће у виђењу простора, а одатле и неразумјевање правила из презентација цртежом просторних објеката.

Lanciano-ин експеримент је интересантан у смислу да је усмјеравала студентски рад у мецо-просторе, гдје њихове акције и њихов осјећај за простор могу да расвијетле тродимензионалне објекте.

У Gueudet-Chartier-ином раду нису укључени само тродимензионални објекти него и вишедимензионални објекти линеарне алгебре. Прототип ситуације се огледа у укључењу векторе којим се користи да би представила цртеже у дводимензионалном или тродимензјоналном простору. Цртежи нису једини репрезентатори геометријских ситуација, али су парадигматски модел (у Fischbein-овом смислу) за више уобичајених ситуција.

Шта би требало да знају учитељи и наставници – предавачи геометрије

Имајући у виду све напријед изложено, осврнимо се и на образовање будућих наставника геометрије, односно какве потешкоће треба да буду превазиђене ради што квалитетнијег образовања из геометрије у основној и средњој школи. Постоји неколико разлога за овакву ситуацију: сиромашан наставни програм из геометрије у обавезним уџебеницима и литератури, слаба организација садржаја са назначеним аспектом меморисања (дефиниције, формуле, ...), недостатак употребе инструмената и другог дидактичког алата, посматрање геометрије као секундарног (мање важног) дијела школске математике који се може избјећи и ништа мање значајно сиромашно знање из геометрије многих наставника.

Све ово као посљедицу има да многи студенти који се одлучују за позив наставника математике имају врло лошу подлогу из геометрије, што на многе начине онемогућава њихово школовање. На несрећу, када ови студенти дођу до звања наставника, они преносе своје грешке, неразумијевања, негативна убјеђења на своје ученике.

Озбиљан проблем у учењу геометрије је пренос концептуалних грешака на студенте (најчешће на подсвјестан начин). Једна таква ситуација је кориштење прототипских примјера из уџбеника од стране предавача. R. Hershkowitz и S. Vinner о томе износе своје промишљање у више својих чланака [18–20], [36]. У тијесној вези са овим је и рад Nitse Cohen, у којем он презентује истраживање на тему класификација и индентификација плоха и правих линија у простору, преферирајући да будући учитељи могу да ријеше проблем идентификацијом и исцртавањем окомитих или паралелних линија и површи.

Критично питање, у односу на наведно је како формирати будуће наставнике математике (основна и средња школа) тј, како одлучити која математичка знања требају имати и који квалитет математичког размишљања су способни да произведу. Опште прихваћено је једно универзално правило да би наставници требало да знају много на дубоком нивоу да би били способни предавати. Van Hiele-ови нивои имају добре референце да одговоре на ово питање. Наиме, наставници морају резоновати бар за један ниво више од њихових ученика (али такође морају бити способни да дјелују са својим студентима на њиховом нивоу). Дакле, наставници у основној школи би требали бити (бар) на трећем нивоу, наставници у средњој школи (бар) на четвртом нивоу.

Други теоретичари ослањајући се на Van Hiele-ијеве нивое и Kuzniak и Houdement-ов рад, дефинишу парадигме карактеристичних различитости за геометрију, то су различити предлошци и организације садржаја, различити путеви интеракције, комуникације и размишљања. Узимајући ове моделе, наставници основне школе требају бити на другој парадигми (геометрија II), наставници средње школе на трећој парадигми (геометрија III).

Дакле можемо закључити да перспективни наставници у основној и средњој школи мора да савладају како да користе различите дидактичке елементе у разним математичким областима, да их знају прилагодити у својим разредима и да стварају нове. Обучавање наставника као перспективних предавача лежи у учењу веза између апстрактног геометријског концепата и конкретне репрезентације која ће ученике потицати на откривање геометријских модела у свакодневном животу.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. M. Acuña-Soto, *The role of slope and y-intercept from the students perspective*, CERME 3, Working group 7, 10 pp.
2. M. Bako, *Different projecting methods in teaching spatial geometry*, CERME 3, Working group 7, 10 pp.
3. N. Cohen, *Preference of directions in 3-D space*, CERME 3, Working group 7, 10 pp., 28 February–3 March, 2003.
4. L. Cosmides, J. Tooby, *Cognitive adaptations for spacial exchange*, In: J. Brakow, L. Cosmides and J. Tooby (Eds): *The Adapted Mind: Evolutionary Psychology and the Generation of Culture*, Oxford University Press, 163–228, 1992.
5. S. Dehaene, *The Number Sence: How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press, 1997.
6. K. Devlin, *The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers are Like Gossip*, Basic Books, 2000.
7. Z.P. Dienes, *La construcción de las matemáticas*, Barcelona, Spain: Vicens Vives, 1970. [original English version: Building up Mathematics, Hutchinson Educat. Ltd., 1964].
8. Z.P. Dienes, *La construcción de las matemáticas*, Barcelona, Spain: Vicens Vives, 1970. [original English version: Building up Mathematics. Hutchinson Educat. Ltd., 1964].
9. Z.P. Dienes, *The theory of the 6 stages of learning with integers*, Mathematics in School 29.1 (2000), 27–33. [see also `http://www.zoltandienes.com/ mathsamples.html`].
10. H. Doan Huu, *L'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane*, Thèse de doctorat de l'Université J. Fourier, Grenoble 1, France, 2001.
11. J.-L. Dorier, Á. Gutirrez and R. Strässer, *Geometrical thinking (Introduction)*, Proceedings of CERME 3, Working group 7, 10 pp.
12. R. Duval, *Sémiosis et pensée humaine*, Bern: Peter Lang, 1995.

13. R. Duval, *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, Repères-IREM 17, 121–138, 1994.

14. R. Duval, *Geometry from a cognitive point of view*, in: Mammana, C.; Villani, V. (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (New ICMI Study Series no. 5), Dordrecht, Holland: Kluwer, 1998, pp. 37–52.

15. F. Gonseth, *La géométrie et le probléme de l'espace*, Lausanne: Le Griffon, 1945–1955.

16. Gh. Gueudet-Chartier, *Geometric thinking in an n-space*, CERME 3, Working group 7, 10 pp.

17. J.L. Heilbron, *Geometry Civilized*. Oxford, U.K.: Oxford University Press, 1998.

18. R. Hershkowitz, *Visualization in geometry—two sides of the coin*, Focus on Learning Problems in Mathematics 11.1 (1989), 61–76.

19. R. Hershkowitz, *Psychological aspects of learning geometry*, in: Nesher, P., Kilpatrick, J. (eds.), *Mathematics and cognition*, Cambridge, U.K.: Cambridge U.P., 1990, pp. 70–95.

20. R. Hershkowitz, S. Vinner, *Children's concept in elementary geometry—A reflection of teacher's concepts?*, Proceedings of the 8th PME Conference, 63–69, 1984.

21. C. Houdement, A. Kuzniak, *Un exemple de cadre conceptuel pour l'etude l'enseignement de la géométrie en formations des maitres*, Educational Srudies in Mathematics, **40**, 3 (1999), 283–312.

22. C. Houdement, A. Kuzniak, *Elementary geometry split into different geometrical paradigms*, CERME 3, Tematik group 7, 9 pp, 28 February–3 March, 2003.

23. E.H. Kónya, *The concept of orientation*, CERME 3, Tematik group 7, 28 February–3 March, 2003.

24. A. Kuzniak, A. Gagatsis, M. Ludwig and C. Marchini, *From geometrical thinking to geometrical work*, CERME 5 (2007), Working group 7, 955–961.

25. F. Kurina, *Geometry—the resource of opportunities*, CERME 3, Working group 7, 10 pp.

26. G. Lakoff, R. Nunez, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, 2000.

27. N. Lanciano, *The processes and difficulties of teachers trainees in the construction of concepts, and related didactic material, for teaching geometry*, CERME 3, Working group 7, 10 pp.

28. V. Larios-Osorio, *Geometrical rigidity: an obstacle in using dynamic geometry software in a geometry course*, CERME 3, Working group 7, 10 pp.

29. U. Leron, *Origin of mathematical thinking: a synthesis*, CERME 3, Tematik group 1, 8 pp.

30. M.-J. Perrin-Glorian, *Studying geometric figures at primary schools – From surfaces to points*, CERME 3, Working group 7, 10 pp.

31. G. Polya, *How to Solve It* [French translation: *Comment poser et résoudre un problème*, Paris: Dunod, 1965].

32. M. Prokopová, *Students' conception of a point: a comparison of phylogenesis and ontogenesis*, CERME 3, Tematik group 7, 28 February–3 March, 2003.

33. Ch. Rolet, *Teaching and learning plane geometry in primary school: acquisition of a first geometrical thinking*, CERME 3, Working group 7, 10 pp.

34. R. Strässer, A. Kuzniak and K. Jones, *Geometrial thinking*, CERME 4 (2005), Report on Tematik group 7.

35. P. Vighi, *The triangle as a mathematical object*, CERME 3, Working group 7, 10 pp.

36. S. Vinner, *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*, in: Tall, D. (ed.), *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, Holland: Kluwer, 1991, pp. 65–81, 1991.

Природно-математички факултет Универзитета у Бањој Луци

E-mail: bato49@hotmail.com