Др Ђоко Г. Марковић

ПРИМЈЕРИ ИНОВАЦИЈА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

1. Уводне напомене

Савремена настава математике настоји да елиминише механичко меморисање великог квантума знања, а такође тежи да избјегне формално развијање психичких способности ученика. Нормално да таква настава подразумјева развијаање ученичких способности, али не на безвриједној математичкој грађи, већ на садржајима који су квалитетни у образовном и васпитном погледу.

Овдје се прије свега мисли на наставу којом доминирају необични задаци, проблеми, иновације.

Рјешавање проблема, који код ученика изазива интересовање и покреће досјетљивост продукујући доживљаје напетости самоангажовања као резултат обавезно има тријумф проналазача. Овакви доживљаји могу створити склоност за умни рад остављајући неизбрисив траг на дух и карактер младог човјека.

Само наставник који код својих ђака буди радозналост дајући задатке који су примјерени њиховом знању, помажући им ријетко у виду стимулативних питања, развијаће у њима склоност ка самосталном логичком мишљењу и освјетљавати путеве до њега.

У супротном, ако он на часовима само механички увјежбава поступке, смањује им интересовање и кочи њихов интелектуални развој, испустиће тако своју велику прилику да утисне неизбрисив печат на позитивни духовни и карактерни развој ученика.

Овдје ћу, користећи лично искуство, приказати неке занимљиве садржаје наставе математике основне и средње школе и њихове методолошке интерпретације или иновације. Намјера ми је да укажем на постојање „непрегледног мора“ разноврсних и лијепих примјера, које можемо користити у функцији разбијања формализма у настави математике.

2. Усмено множење – множење помоћу сабирања (двије дигиталне технике)

У „Математици“ (стручно-методичком часопису) бр. 2, Београд, 1975, проф. др Мирко Стојаковић наводи примјер множења помоћу сабирања (једне дигиталне технике). Овдје ћу, ослањајући се на тај лијепи рад, покушати да укажем на повезаност, тј. еквивалентност те дигиталне технике са једним лакшим извођењем множења на прстима уз неке „нове“ приступе -- олакшице при усменом множењу.

Рачунање на прстима је претходило и послужило као мотив увођењу десетичног бројног система. Некада се сматрало, и још увијек се мисли, да је такво рачунање примитивно, тј. да се њим могу вршити само сабирања малих бројева, или изводити мања одбројавања. Међутим, прсти нијесу баш тако тривијално средство рачунања. Помоћ у њих могуће је вршити и рачунску операцију множења.

Усмено множење подразумијева поступке вантабличног множења, који су неопходна припрема ученика за тзв. писмено извођење те операције.

Овдје се нећемо бавити алгоритмима усменог множења које је свима познато и може се наћи у уџбеницима математике разредне наставе, већ ћемо приказати раритетне и иновиране, а истовремено веома значајне поступке множења на прстима и неке корисне алгоритме који омогућавају лакше извођење те рачунске операције.

Примјери

1) Обиљежимо бројевима од 1 до 10 прсте на обије руке и изаберимо било који прст. Рецимо да је то прст који одговара броју 7. Сусједни број са једне стране му је број 6, а са друге стране има 3 „прста“.

Лако је уочити да није случајан наведени редосљед, па самим тим и хеуристички доћи до релације $63 - 7 \cdot 9$ (погледати сљедећу схему).

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \underline{6} \quad \mathbf{7} \quad \underline{8 \quad 9 \quad 10}$

(6д 3ј), дакле $7 \cdot 9 = 60 + 3 = 63$.

(Са 6д означавамо шест десетица, а са 3ј обиљежавамо три јединице).

Производ било којег броја и броја 9 добија се потпуно аналогно претходном примјеру:

2) 5 пута 9 је 45 – са лијеве стране броја 5 је број 4, а са десне остаје још 5 „прстију“.

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \underline{4} \quad \mathbf{5} \quad \underline{6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10}$

(4д 5ј), дакле $5 \cdot 9 = 40 + 5 = 45$.

Број 4 представља број десетица, а 5 (број подвучених бројева) је број јединица траженог производа.

3) 13 пута 9 је 117 – са лијеве стране од непостојећег „прста“ са ознаком броја 13 има 12 „прстију“ и то су десетице, дакле 120, а до прста са ознаком 10 има 3 „прста“, па пошто сад бројимо уназад према броју 10, узећемо број 3 са знаком минус, тако се као резултат производа $13 \cdot 9$ добија број 117.

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad \underline{12} \quad 13$

(12д

−3ј) , дакле $13 \cdot 9 = 120 - 3 = 117$.

Све ово се може и доказати: $9 \cdot a = (10-1)\cdot(a-1+1) = 10\cdot(a-1)+(10-a)$.

Такође важе и сљедеће релације:

$$a \cdot 99 = 99 \cdot a = (100-1)\cdot(a-1+1) = 100\cdot(a-1)+(100-a),$$
$$a \cdot 999 = 999 \cdot a = (1000-1)\cdot(a-1+1) = 1000\cdot(a-1)+(1000-a).$$

Погледајмо како њихова примјена ефектно изгледа на примјерима:

4) $54 \cdot 99 = 53 \cdot 100 + (100-54) = 5300 + 46 = 5346$.

5) $728 \cdot 999 = 1000 \cdot 727 + (1000-728) = 727000 + 272 = 727272$.

Множење бројевима различитим од 9, 99, 999 итд. може се на начин сличан претходним обављати на прстима. Тако је нпр.

6) $8 \cdot 6 = (10-2)\cdot(6-2+2) = 10\cdot(6-2)+2\cdot(10-6) = 10\cdot 4 + 2\cdot 4 = 48$, или у општем случају

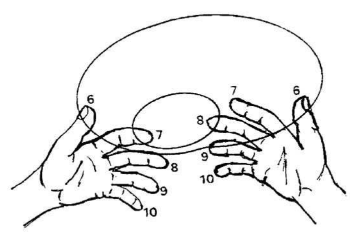
$$8 \cdot a = 10 \cdot (a-2) + 2 \cdot (10-a)$$

и аналогно томе $98 \cdot a = 100\cdot(a-2)+2\cdot(100-a)$ или $998 \cdot a = 1000\cdot(a-2)+2\cdot(1000-a)$ итд. Тако је:

7) $877 \cdot 998 = 875 \cdot 1000 + 2\cdot(1000-877) = 875000 + 2 \cdot 123 = 875246$.

Међутим, помоћу прстију на рукама пружа се могућност и за једну другу врсту множења, које важи за све бројеве, а подесно је када множење два броја треба свести на једно сабирање и једно множење.

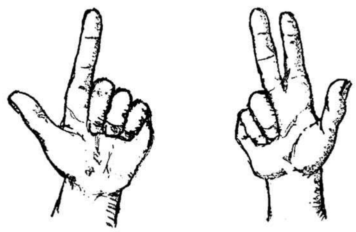
8) Обиљежимо прсте на рукама редом бројевима 6, 7, 8, 9 и 10 (као на слици 1). Саставимо прсте 7 и 8. Укупан број прстију на обије руке заједно са нумерисаним прстима у смјеру од њих према палчевима је 5 (то су прсти са ознакама 7, 6 на једној и 8, 7, 6 на другој руци). Тај број 5 представља број десетица производа $7 \cdot 8$. Број преосталих прстију на једној руци је 3, а на другој 2. Њихов производ $2 \cdot 3$ чини број јединица траженог производа. Тако добијамо $7 \cdot 8 = (2+3)\cdot 10 + 3 \cdot 2 = 56$.



Сл. 1

Провјеравајући све остале могућности, користећи претходни алгоритам, увијек добијамо тачан резултат. Погледајмо још неколико примјера:

9) Саставимо прсте 9 и 7. Укупан број прстију на обије руке заједно са нумерисаним прстима у смјеру од њих према палчевима је 6 (то су прсти са ознакама 9, 8, 7, 6 на једној, и 7, 6 на другој руци). Тај број 6 представља број десетица производа $9 \cdot 7$. Број преосталих прстију на једној руци је 3, а на другој 1. Њихов производ чини број јединица траженог производа. Тако добијамо $7 \cdot 9 = (2+4)\cdot 10 + 3 \cdot 1 = 63$.



Сл. 2

Све ово би могло да поприми и другачији облик ако бисмо прсте са ознакама 7, 6 на једној и 8, 7, 6 на другој руци испружили, а све остале прсте савили (види слику 2). У том случају имали бисмо једноставнију слику, па самим тим и простије објашњење о чему ћемо говорити у даљем тексту.

Када дјеца савладају множење бројева од 1 до 6, онда их је лако научити множењу на прстима бројева од 6 до 10.

Погледајмо још једну тривијалну (у извјесном смислу јаснију) интерпретацију сличну претходном поступку:

10) Одредити производ $8 \cdot 9$.

Лако је уочити да је $8 \cdot 9 = (5+3) \cdot (5+4)$. На лијевој руци испружимо три, пошто је осам једнако пет плус три, а на десној руци испружимо четири прста, јер је девет једнако пет плус четири. Истовремено, на лијевој руци савијамо $5-3=2$ прста, а на десној $5-4=1$. Тражени производ добијамо на сљедећи начин: бројеве подигнутих прстију на обије руке саберемо (у нашем примјеру $3+4=7$) и тај збир представљају десетице, тј. имамо 70. Овоме броју треба додати производ бројева, којима су представљени савијени прсти, тј. број $2 \cdot 1 = 2$, па је број јединица траженог производа 2. Коначно, $8 \cdot 9 = 70 + 2 = 72$.

О овом поступку говорио је још у 17. вијеку арапски математичар Беда-Еддин у књизи „Кхеласет ал хиссиб“ на сљедећи начин:

$$\begin{aligned}
8 \cdot 9 &= (5+3) \cdot (5+4) = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \\
&= 5 \cdot (4+1) + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot (5-1) \\
&= 5 \cdot 4 + 5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 3 = (5+5) \cdot 4 + (5+5) \cdot 3 + 2 \\
&= 10 \cdot (3+4) + (5-3) \cdot (5-4) = 10 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 70 + 2 = 72, \quad \text{тј.} \\
8 \cdot 9 &= (5+3) \cdot (5+4) = 10 \cdot (3+4) + (5-3) \cdot (5-4) = 10 \cdot 7 + 2 \cdot 1 \\
&= 70 + 2 = 72,
\end{aligned}$$

односно уопштено за произвољне бројеве $a, b \in \{6, 7, 8, 9\}$ имамо да је:

$$a \cdot b = \underbrace{[(a-5)+(b-5)]}_{\text{број десетица}} \cdot 10 + \underbrace{[5-(a-5)] \cdot [5-(b-5)]}_{\text{број јединица}},$$

при чему је $[(a-5)+(b-5)]$ број уздигнутих прстију и представља број десетица траженог подизвода, а $[5-(a-5)]$ и $[5-(b-5)]$ су бројеви савијених прстију, чији је производ $[5-(a-5)] \cdot [5-(b-5)]$ једнак броју јединица траженог производа $a \cdot b$.

Погледајмо поново како то све изгледа на примјеру:

8)

$$7 \cdot 8 = \underbrace{[(7-5)+(8-5)]}_{\text{број десетица}} \cdot 10 + \underbrace{[5-(7-5)] \cdot [5-(8-5)]}_{\text{број јединица}} = (2+3) \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 56,$$

при чему је $[(7-5)+(8-5)]$, тј. $2+3=5$ број уздигнутих прстију на обије руке и представља број десетица траженог производа, а $[5-(7-5)]$ и $[5-(8-5)]$, тј. 3 и 2 су бројеви савијених прстију, чији је производ $[5-(7-5)]\cdot[5-(8-5)]$ једнак броју јединица траженог производа (видјети слику 2).

Све се ово могло сагледати и на сљедећи начин:

$$\begin{aligned} a\cdot b &= a\cdot b+10\cdot a010\cdot a+10\cdot b-10\cdot b+100-100\\ &=(a+b-10)\cdot 10+(10-a)\cdot(10-b). \end{aligned}$$

У случају поменутог примјера 9) имали бисмо:

$$8\cdot 9=(8+9-10)\cdot 10+(10-8)\cdot(10-9)=7\cdot 10+2\cdot 1=72.$$

Дакле, $a+b-10$, тј. број уздигнутих прстију представља број десетица траженог производа $a\cdot b$, а $10-a$ и $10-b$ представљају савијене прсте, а њихов производ $(10-a)\cdot(10-b)$ представља број јединица траженог производа $a\cdot b$.

Када би било више прстију и када бисмо ово рачунање наставили и преко 10, опет бисмо добили тачне резултате. Тако је:

11) $17\cdot 16=[(17-5)+(16-5)]\cdot 10+(10-17)\cdot(10-16)=230+(-7)\cdot(-6)=272.$

Погледајмо сада још једну елегантнију могућност, како да се скраћено усмено одређује производ $(10+a)\cdot(10+b)$, при чему су $a,b\in\{1,2,\dots,9\}$.

Лако је уочити да је: $(10+a)\cdot(10+b)=100+10\cdot b+10\cdot a+a\cdot b=[(10+a)+b]\cdot 10+a\cdot b$, тј. да је $(10+a)+b$ број десетица, којима треба додати број $a\cdot b$, да би се одредио тражени производ $(10+a)\cdot(10+b)$.

Формула за усмено и брзо израчунавање производа било која два броја из друге десетице је

$$(10+a)\cdot(10+b)=[(10+a)+b]\cdot 10+a\cdot b,$$

па примјер 11) можемо рјешити на сљедећи ефикаснији начин:

$17\cdot 16=(17+6)\cdot 10+7\cdot 6=230+42=272.$. Погледајмо како то изгледа на примјерима 12 и 13.

12) Израчунати производ $17\cdot 18$. Задатак рјешавамо усмено тако што броју десетица $(10+a)+b=17+8=25$, додајемо број $a\cdot b=7\cdot 8=56$ тј. $17\cdot 18=(17+8)\cdot 10+7\cdot 8=250+56=306$.

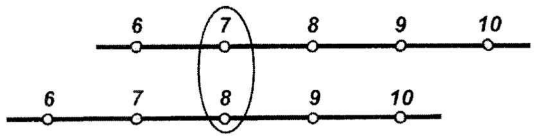
13) $19\cdot 14=(19+4)\cdot 10+9\cdot 4=230+36=266.$

У општем случају (дакле и у случају када имамо бројни систем са основом m) важи формула

$$a\cdot b=(a+b-m)\cdot m+(m-a)\cdot(m-b).$$

14) $94\cdot 98=(94+98-100)\cdot 100+(100-94)\cdot(100-98)=9200+6\cdot 2=9212.$

Све ово можемо приказати и у облику сличном логаритмару (види слику 3). Помножимо бројеве $7 \cdot 8$, као у примјеру 8). Конструишимо двије скале и на њима обиљежимо бројеве на једнаком растојању, при чему бројеве које множимо постављамо једног испод другог, или их маркирамо клизачем. Померањем скала треба извршити сабирање које изискује наведени образац, тако добијемо десетице траженог производа, док јединице тог истог производа одређујемо множењем друга два броја, које такође очитавамо на скалама. Како је ово посљедње множење обично унапријед познато, то ћемо тражени производ одредити помоћу сабирања.



Слика 3

Подигнути прсти на првој скали су нумерисани бројевима 6, 7, а на другој 6, 7, 8 и има их $[(7-5)+(8-5)] = 2+3 = 5$ и представљају десетице производа $7\cdot 8$, а јединице тог производа представљају скупљени прсти нумерисани бројевима 8, 9, 10 на првој скали и 9, 10 на другој скали, тј. $[5-(7-5)]\cdot[5-(8-5)] = 3\cdot 2 = 6$, па је $7 \cdot 8 = (2+3)\cdot 10 + 3 \cdot 2 = 56$.

Дакле, видимо да тражено множење $7 \cdot 8$ можемо лако извршити помоћу сабирања бројева $(2+3)\cdot 10$ и $3 \cdot 2$.

Погледајмо сада како се скраћено усмено одређују производи:

а) $(10+a)\cdot(20+b)$ и б) $(20+a)\cdot(10+b)$,

при чему су $a, b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Лако је уочити да је:

а) $(10+a)\cdot(20+b) = 200 + 10\cdot b + 20\cdot a + a\cdot b = [(20+b) + 2\cdot a]\cdot 10 + a\cdot b$, тј. да је $(20+b) + 2\cdot a$ број десетица, којима треба додати број $a\cdot b$, да би се одредио тражени производ;

б) $(20+a)\cdot(10+b) = [(20+a) + 2\cdot b]\cdot 10 + a\cdot b$, тј. да је $(20+a) + 2\cdot b$ број десетица, којима треба додати број $a\cdot b$, да би се одредио тражени производ.

Погледајмо како то изгледа на примјерима производа $27 \cdot 18$ и $17 \cdot 28$.

15) $27\cdot 18$ усмено рачунамо тако што броју десетица $(20+a)+2\cdot b = 27+2\cdot 8 = 27+16 = 43$ додајемо $a\cdot b = 7\cdot 8 = 56$, тј. $27\cdot 18 = 430+56 = 486$.

16) У случају $17\cdot 28$ производ одређујемо тако што броју десетица $(20+b)+2\cdot a = 28+2\cdot 7 = 28+14 = 42$ додајемо $a\cdot b = 7\cdot 8 = 56$, тј. $27\cdot 18 = 420+56 = 476$.

Слично претходном поступку можемо скраћено, усмено одредити и производ $(20+a)\cdot(20+b)$, при чему су $a, b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Лако је уочити да је

$$(20+a)\cdot(20+b) = 400 + 20\cdot a + 20\cdot b + a\cdot b = (20+a+b)\cdot 20 + a\cdot b,$$

тј. да је $2 \cdot (20 + a + b)$ број десетица, којима треба додати број $a \cdot b$, да би се одредио тражени производ. Погледајмо како то изгледа у случају производа $26 \cdot 29$.

17) $26 \cdot 29 = 2 \cdot (26 + 9) \cdot 10 + 6 \cdot 9 = 700 + 54 = 754$.

Јасно је да бисмо претходни поступак могли примјенити и на бројевима четврте, пете, ... десетице.

На крају, ево како можемо лако усмено израчунавати квадрате бројева чија је посљедња цифра 5. Квадрат таквог броја добија се множењем броја који се добија изостављањем цифре 5 и његовог сљедбеника са 100 и дописивањем том производу броја 25. На пример,

18) $15^2 = 1 \cdot 2 \cdot 100 + 25 = 225$; или **19)** $25^2 = 2 \cdot 3 \cdot 100 + 25 = 625$, итд.

Ово се може лако доказати, $(10a+5)^2 = 100 \cdot a^2 + 100 \cdot a + 25 = 100 \cdot a \cdot (a+1) + 25$.

3. Емпиријска евaулација неких модела примјене иновационих елемената у настави математике основне школе

У овом поглављу описаћу, посматрајући из угла сопствене емпирије, ефекте наставе при увођењу и примјењивању необичних раритетних и иновираних математчких садржаја (конкретно, поред наведеног, усменог множења помоћу дигиталне технике и осталих приказаних варијанти усменог множења, презентоваћу и један примјер из средњошколске праксе).

Посматрајући проблематику примјене иновационих елемената у настави математике основне и средње школе, након тридесетогодишњег искуства у непосредној настави математике, не могу да се одупрем утиску чуђења израженог питањем: Зар је могуће да поред таквог богатства, цијелог спектра различитих, елегантних, једноставних и лијепих методолошко-математички иновираних садржаја, попут претходно наведених и многих сличних примјера ниједан од њих није пронашао своје „мјесто под сунцем“ неког модерног уџбеника, приручника или збирке задатака.

Ако је то тако, а углавном је тако, када су у питању уџбеници, приручници и збирке задатака математике основне и средње школе и гимназија, онда не треба да нас чуди чињеница да је мали број наставника у непосредној настави спреман да нешто радикалније мијења, а камоли самоиницијативно иновира у том процесу.

Тешко је дати одговор на питање: Зашто је то тако?

Да ли је у питању неадекватна стручност наставника, тј. незадовољавајући квалитет њихових тзв. примјенљивих и процесних знања у смислу модерних класификација нпр. Маразанове таксономије знања?

Да ли неко, ко не умије да плива, може научити некога ко не умије да плива, да плива?

Без много двоумљења, са великом вјероватноћом можемо у првом случају дати потврдан, а у другом одричан одговор на постављена питања.

„Оправдање“ за такво стање у настави основне и средње школе могло би се потражити у различитим чиниоцима, прије свега у слабом квалитету одговарајућих знања из методике наставе математике, а такође и непостојању разноврсне методичко-математичке литературе и квалитетних стручних методолошко-математичких часописа, у којима би били презентовани историјско-филозофско-развојно-иновациони, а истовремено модерни психолошко-дидактички теоретски и практични трендови итд.

Међутим, када су ученици у питању они су увијек спремни и радо прихватају промјене у настави, посебно разноврсност при објашњавању (доказивању), тј. иновиране, једноставније и љепше приказане математичке садржаје.

Све вријеме током бављења наставом математике трагао сам за иновацијама и раритетним полиформним методолошким презентацијама многих математичких феномена и испитивао њихове ефекте на разбијање формализма у наставном процесу, и њихов допринос на квалитет и трајност ученичких знања.

Резултати такве наставе, у свјетлу иновационих компоненти, огледали су се како у бољем разумјевању и усвајању пређених садржаја, тако и у знатном повећању интересовања и активности ученика на часовима математике, са посебном тежњом ка самосталном, креативном раду.

Настава математике, „зачињена“ иновационим елементима, својим динамичким приступом, тј. комплетним сагледавањем и разумијевањем датих проблема омогућује ученицима да јасније проникну у суштину проблема одвикавајући их од шаблонског рјешавања задатака и самим тим значајно доприноси стварању трајних знања.

Након експерименталних провјера на часовима математике основне школе (семинарски радови студената, тј. провјере учинка иновација на разбијање формализма у настави математике и динамизирање и активизирање тог процеса) у свим случајевима, гдје су били придодати иновациони и раритетни елементи, ефекти интерактивне методологије неизоставно су индуковали динамички приступ свеобухватног сагледавања проблема, што је коначно импликовало рађање квалитетних и трајних знања. Експерименти су потврдили позитивне ефекте иновација у настави математике, који су били идентични оним, до којих сам дошао личним искуством.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Lietzmann, *Methodik des mathematischen Unterrichts IV*, Heidelberg, 1955.
2. Математическое просвещение, (третья серия), Издательство МЦНИО, Москва, 2004.
3. G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, Inc., vol. I, 1962, vol. II, 1965.
4. Ђ. Г. Марковић, ***Нови погледи на методику наставе математике***, Макарије, Подгорица, 2008.

E-mail: `nemanjamk@cg.rs`