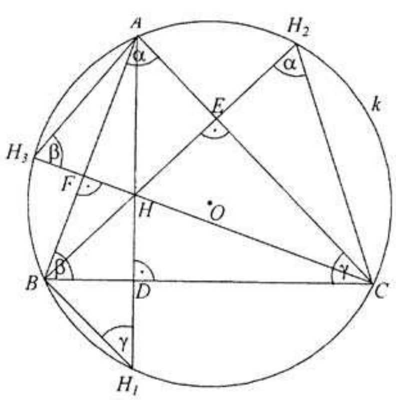
Др Шефкет Арсланагић и Алија Муминагић

ЈЕДНА ЗАНИМЉИВА ЈЕДНАКОСТ У ТРОУГЛУ И ЊЕНЕ ПОСЉЕДИЦЕ

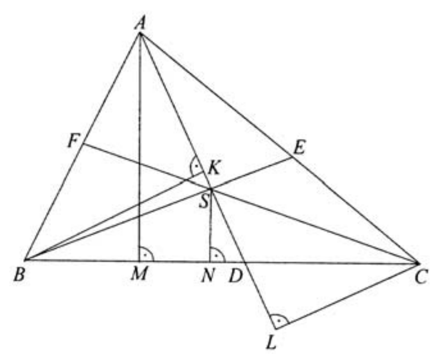
Знамо да за троугао важе многе важне теореме. У овом чланку ћемо дати једну занимљиву једнакост у троуглу која има и неке интересантне посљедице. За доказ те једнакости користићемо неке друге које су и саме вриједне и занимљиве. Ријеч је о слједећој једнакости у троуглу[1]):

$$\left(\frac{\overline{AH_1}}{\overline{AD}}\right)^2+\left(\frac{\overline{BH_2}}{\overline{BE}}\right)^2+\left(\frac{\overline{CH_3}}{\overline{CF}}\right)^2=5+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)^2}, \tag{1}$$

гдје су тачке D, E и F подножја висина троугла повучених из врхова A, B и C редом на странице BC, CA и AB, а тачке H_1, H_2 и H_3 су тачке у којима продужеци висина сијеку описану кружницу k троугла, док су α, β и γ унутрашњи углови троугла (сл. 1).



Сл. 1



Сл. 2

Да бисмо доказали једнакост (1), доказаћемо сада двије теореме о троуглу.

Теорема 1. *Тачке H_1, H_2 и H_3 које су симетричне ортоцентру H с обзиром на странице BC, CA и AB датог троугла ABC леже на описаној кружници тог троугла.*

[1] Овдје AH_1 представља дуж, а $\overline{AH_1}$ дужину те дужи.

Доказ. Према сл. 1, због симетрије тачака H и H_1 с обзиром на страницу BC имамо:

$$\angle BH_1C = \angle BHC = \angle FHE.$$

Због нормалности страница троугла ABC и његових висина, имамо

$$\angle FHE + \angle FAE = 180^\circ.$$

Према томе је

$$\angle BH_1C + \angle BAC = 180^\circ,$$

па су A, B, H_1 и C коцикличне тачке, тј. припадају истој кружници k, што је требало и доказати. ■

На темељу теореме 1. је $\overline{HD} = \overline{DH_1}$, $\overline{HE} = \overline{EH_2}$ и $\overline{HF} = \overline{FH_3}$ па имамо

(2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\overline{AH_1}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BH_2}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CH_3}}{\overline{CF}}\right)^2 &= \left(\frac{\overline{AD}+\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BE}+\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CF}+\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2 \\ &= \left(1+\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(1+\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(1+\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2 \\ &= 3 + 2\left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right) + \left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2.\end{aligned}$$

Сада из (1) и (2) видимо да је довољно да докажемо да је

$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} = 1 \tag{3}$$

и

$$\left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)^2}, \tag{4}$$

Да бисмо доказали једнакост (3), доказаћемо да вриједи општија једнакост. То ће бити

Теорема 2. *Ако је тачка S у унутрашњости датог троугла ABC и ако праве AS, BS и CS сијеку странице BC, CA и AB у тачама D, E и F, тада вриједи једнакост*

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{SE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{CF}} = 1. \tag{5}$$

Доказ. Нека су површине троуглова: $P_{\triangle ABC} = P$, $P_{\triangle BSC} = p$, $P_{\triangle ASC} = q$ и $P_{\triangle ASB} = r$. Троуглови $\triangle ASB$ и $\triangle ASC$ имају заједничку страницу AS и висине BK и CL (сл. 2); зато је

$$\frac{r}{q} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AS}\cdot\overline{BK}}{\frac{1}{2}\overline{AS}\cdot\overline{CL}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CL}},$$

а из сличности троуглова $\triangle BDK \sim \triangle CDL$ слиједи
$$\frac{\overline{BK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}},$$
па сада имамо:
$$\frac{r}{q} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \quad \text{и слично} \quad \frac{p}{r} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \quad \text{и} \quad \frac{q}{p} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}.$$
Осим тога је такође
$$\frac{p+q+r}{p} = \frac{P}{p} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AM}}{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{SN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{SN}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{SD}},$$
гдје посљедња једнакост слиједи из сличности троуглова $\triangle AMD$ и $\triangle SND$. Слично добијамо да је:
$$\frac{p+q+r}{q} = \frac{P}{q} = \frac{\overline{BE}}{\overline{SE}} \quad \text{и} \quad \frac{p+q+r}{r} = \frac{P}{r} = \frac{\overline{CF}}{\overline{SF}}.$$
Коначно добијамо сабирањем реципрочних вриједности трију посљедњих једнакости
$$\frac{\overline{SD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{SE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{CF}} = \frac{p}{p+q+r} + \frac{q}{p+q+r} + \frac{r}{p+q+r} = 1.$$
Овим је теорема 2 доказана. ■

Сада ако узмемо да је $S \equiv H$, тада добијамо из (5) да је
$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} = 1,$$
а ово је једнакост (3) коју је требало доказати.

Докажимо сада и једнакост (4).

Са слике 1 видимо једнакост углова (периферијски углови над истим луком круга):
$$\angle AH_1B = \angle ACB = \gamma, \quad \angle AH_3C = \angle ABC = \beta, \quad \angle BH_2C = \angle BAC = \alpha.$$
У правоуглом троуглу $\triangle CEH_2$ је
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{EH_2}} = (\text{због } \overline{EH_2} = \overline{HE}) = \frac{\overline{CE}}{\overline{HE}},$$
одакле је $\overline{HE} = \dfrac{\overline{CE}}{\operatorname{tg}\alpha}$, а у правоуглом троуглу $\triangle BEC$ је $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$, одакле је $\overline{BE} = \overline{CE}\operatorname{tg}\gamma$. Тако је сада
$$\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma} \quad \text{и аналогно} \quad \frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}, \quad \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$
Сада имамо:
$$\begin{aligned}\left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2 &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\gamma} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}\\ &= \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma}{(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)^2} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)^2}\end{aligned}$$

(због $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$), а ово је једнакост (4) коју је требало доказати.

Из једнакости (2), (3) и (4) добијамо сада дату једнакост (1).

Интересантно је напоменути да вриједе и сљедеће једнакости:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = 2,$$

као и

$$\frac{\overline{AH_1}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH_2}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH_3}}{\overline{CF}} = 4.$$

Доказе ових једнакости препуштамо читаоцима.

На крају ћемо дати и једну интересантну посљедицу једнакости (1). Због очигледне неједнакости $\frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geqslant 0$, тј. $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$ $(x, y, z \in \mathbf{R})$ добијамо да је

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x+y+z)^2} \leqslant \frac{1}{3},$$

а одатле је

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)^2} \leqslant \frac{1}{3},$$

па сада добијамо из (1)

$$\left(\frac{\overline{AH_1}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BH_2}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CH_3}}{\overline{CF}}\right)^2 \leqslant \frac{16}{3}, \tag{6}$$

гдје једнакост вриједи у случају када је $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma$, тј. $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, односно за једнакостранични троугао.

Неједнакост (6) представља интересантну неједнакост која се може узети засебно као једно интересантно тврђење (проблем).

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo 2005.
2. Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka iz elementarne matematike sa osnovama teorije*, Grafičar promet, Sarajevo 2006.
3. J. Carstensen, A. Muminagić, *Matematiske diamanter*, Frederiksberg (Danska), 2005.
4. D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

Универзитет у Сарајеву, Природно-математички факултет, Змаја од Босне 35, 71000 Сарајево, Босна и Херцеговина

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba