Мр Марко Обрадовић

ДИРИХЛЕОВА И РЕМЗИЈЕВА ТЕОРЕМА

Егзистенција комбинаторних конфигурација

Ф. П. Ремзи[1] је извео теорему, чији је Дирихлеов[2] принцип само један сићушни специјалан случај. Ремзијева теорема осигурава егзистенцију извесних бројева, тзв. Ремзијевих бројева. Тиме се бави „Ремзијева теорија“ у подручју модерне комбинаторике.

Нека је S произвољан непразан скуп, $P(S)$ партитивни скуп скупа S, $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ варијација без понављања елемената скупа S, а $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ варијација елемената скупа $P(S)$. Ако је $a_k \in S_k$ за свако $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, онда се варијација $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ зове систем различитих представника (скраћено с.р.п) варијације $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$. Елемент $a_k \in S_k$ је представник скупа S_k.

Дирихлеов принцип је један од најједноставнијих принципа комбинаторике. Често се исказује у шаљивој форми као „Принцип претинца, кутија или голубарника“. Прецизније, имамо:

Теорема 1 (Дирихле). *Нека је $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ разбијање $(nk+1)$-скупа S на k блокова. Тада бар један од скупова A_1, A_2, $\ldots$, A_k садржи не мање од $n+1$ елемената.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. $|A_j| \leqslant n$ за све $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Тада је $|S| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| \leqslant kn$, а то је контрадикција са условом $|S| = nk+1$. ■

Напомена 1. Неопходан услов да за скупове S_1, S_2, $\ldots$, S_m постоји с.р.п. јесте да за сваки $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и сваку k-комбинацију $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ елемената скупа $\{1, 2, \ldots, m\}$ важи

$$|S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup \cdots \cup S_{j_k}| \geqslant k.$$

Дакако, ово је интуитивно јасно. Начин закључивања који лежи у основи Дирихлеовог принципа може се веома ефектно применити у сличним проблемима.

Да је тај услов и довољан за постојање различитих претпоставки доказао је Хол (Filip Hall).

[1] Frank P. Ramsey (1903–1930), енглески математичар
[2] P.G.L. Dirichlet (1805–1859), немачки математичар

Лема 1 (Хол, 1953). *Нека за скупове S_1, S_2, ... , S_m важи неопходан услов за егзистенцију с.р.п. и нека сваки од тих скупова садржи не мање од n елемената. Тада важи:*

1° *ако је $n \leqslant m$, онда $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ има бар $n!$ с.р.п;*

2° *ако је $n > m$, онда $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ има бар $\dfrac{n!}{(n-m)!}$ с.р.п.*

Доказ. Проводи се математичком индукцијом. ■

Напомена 2. Претпоставимо ли да не постоји с.р.п. за $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$. Тада из Холове теореме следи да постоје бројеви j_1, j_2, ... , j_p, такви да важи:

1° $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant m$,

2° $|S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup \cdots \cup S_{j_p}| = q < p$.

Коначно имамо:

Лема 2. *Нека је S n-скуп и нека је $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Ако је $n \geqslant q_1 + q_2 - 1$ за $q_1, q_2 \in \mathbf{N}$, онда је $|S_1| \geqslant q_1$ или $|S_2| \geqslant q_2$.*

Доказ. Ако је $|S_1| \leqslant q_1 - 1$ и $|S_2| \leqslant q_2 - 1$, онда је $|S| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| \leqslant q_1 + q_2 - 2$, а то је контрадикција. ■

Слаба форма Дирихлеовог принципа гласи: *ако $n+1$ предмета било како распоредимо у n кутија (претинаца), онда бар једна кутија садржи барем два од тих предмета.*

Напомена 3. Очито је за $n < q_1+q_2-1$ могуће да важи $|S_1| \leqslant q_1-1$ и $|S_2| \leqslant q_2-1$, као рецимо у случају $S_1 = \{1, 2, \ldots, q_1-1\}$, $S_2 = \{q_1, q_1+1, \ldots, q_1+q_2-2\}$.

Уопштавајући, добијамо *Ремзијеву теорему.*

Теорема 2 (основна). *Нека су $r, q_1, q_2 \in \mathbf{N}$ за које важи $r \geqslant 1$, $q_1 \geqslant r$, $q_2 \geqslant r$. Тада постоји најмањи природан број $R(q_1, q_2; r)$ такав да за сваки природан број $n \geqslant R(q_1, q_2; r)$ важи тврђење:*

ако је S произвољан n-скуп, $P_r(S)$ скуп свих r-подскупова скупа S и $P_r(S) = \Phi_1 \cup \Phi_2$ за $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$, онда бар за један број $j \in \{1, 2\}$ постоји q_j-подскуп скупа S чији су сви r-подскупови садржани у фамилији Φ_j.

Доказ изводимо математичком индукцијом по q_1, q_2, r.

(a) Имамо једнакости:

(1) $$R(q_1, q_2; r) = q_1 + q_2 - 1, \quad q_1 \geqslant 1, \ \ q_2 \geqslant 1,$$

(2) $$R(q_1, r; r) = q_1, \quad q_1 \geqslant r > 1,$$

(3) $$R(r, q_2; r) = q_2, \quad q_2 \geqslant r > 1.$$

Доказујемо на следећи начин.

Једнакост (1) следи из леме 2. Нека је даље $n \geqslant q_1$, $q_2 = r$.

Ако је $\Phi_2 = \varnothing$, онда је $\Phi_1 = P_r(S)$, па су сви r-подскупови неког q_1-подскупа скупа S садржани у фамилији Φ_1. Ако је $\Phi_2 \neq \varnothing$, онда произвољан r-скуп $A \in \Phi_2$ има само један r-подскуп (самог себе), који је садржан у Φ_2.

Ако је $n < q_1$, $q_2 = r$ и $\Phi_2 = \varnothing$, онда уопште не постоји q_1-подскуп скупа S, а такође не постоји r-подскуп скупа S који је садржан у Φ_2. Тиме је доказана и једнакост (2). Аналогно се доказује једнакост (3).

(б) Нека за бројеве $r \geqslant 2$, $q_1 \geqslant r+1$ и $q_2 \geqslant r+1$ постоје бројеви $p_1 = R(q_1-1, q_2; r)$, $p_2 = R(q_1, q_2-1; r)$, $R(p_1, p_2; r-1)$, тако да за сваки од њих важи услов теореме. Довољно је још доказати да је

$$R(q_1, q_2; r) \leqslant R(p_1, p_2; r-1) + 1. \tag{4}$$

Даље, претпоставимо да скуп S садржи више од $R(p_1, p_2; r-1)$ елемената.

Нека је $P_r(S) = \Phi_1 \cup \Phi_2$ уз $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$ и нека је a_0 произвољни елемент скупа S, $S' = S \setminus \{a_0\}$ и $P_{r-1}(S') = \Phi_1' \cup \Phi_2'$, при чему за сваки скуп $A \in P_{r-1}(S')$ и свако $j \in \{1, 2\}$ важи $A \in \Phi_j'$ акко $A \cup \{a_0\} \in \Phi_j$. Будући да S' садржи бар $R(p_1, p_2; r-1)$ елемената, то је по индуктивној претпоставци тачно бар једно од следећа два тврђења:

(i) постоји p_1-подскуп W скупа S' чији сви $(r-1)$-подскупови припадају фамилији Φ_1';

(ii) постоји p_2-подскуп скупа S' чији сви $(r-1)$-подскупови припадају фамилији Φ_2'.

Из (i), будући да скуп W садржи $R(q_1-1, q_2; r)$ елемената и како су сви r-подскупови скупа W садржани у $\Phi_1 \cup \Phi_2$, важи:

(i_1) постоји (q_1-1)-подскуп T_1 скупа W чији сви r-подскупови припадају фамилији Φ_1;

(i_2) постоји q_2-подскуп T_2 скупа W чији су сви r-подскупови садржани у Φ_2.

Коначно, ако важи (i_1), онда је $T_1 \cup \{a_0\}$ q_1-подскуп скупа S чији су сви r-подскупови садржани у Φ_1. Ако важи (i_2), онда је T_2 q_2-подскуп скупа S чији су сви r-подскупови садржани у Φ_2.

Аналогно се разматра случај када важи (ii). Доказ неједнакости (4) је завршен, а тиме и доказ теореме 2. ■

ПОСЛЕДИЦА 1. *Нека су r, $q_1, q_2, \ldots, q_m$ природни бројеви, такви да је $r \geqslant 1$, $m \geqslant 2$ и $q_j \geqslant r$ за све $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Тада постоји најмањи природан број $R(q_1, q_2, \ldots, q_m; r)$, такав да за сваки природан број $n \geqslant R(q_1, q_2, \ldots, q_m; r)$ важи:*

ако је S произвољан n-скуп, $P_r(S)$ скуп свих r-подскупова скупа S и $P_r(S) = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \cdots \cup \Phi_m$ уз $\Phi_j \cap \Phi_k = \varnothing$ за $j \neq k$, $j, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, онда бар за један број $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ постоји q_j-подскуп скупа S чији су сви r-подскупови садржани у фамилији Φ_j.

Доказ је једноставан. Индукцијом по m добијамо следеће.

За $m = 2$ добијамо исказ теореме 2.

Нека је S n-скуп и $P_r(S) = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \cdots \cup \Phi_m$ уз $\Phi_j \cap \Phi_k = \varnothing$ за $j \neq k$, $j, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Означимо $\Phi_2' = \Phi_2 \cup \Phi_3 \cup \cdots \cup \Phi_m$, $q_2' = R(q_2, \ldots, q_m; r)$. Тада имамо:

ако је $n \geqslant R(q_1, q_2'; r)$, онда постоји q_1-подскуп скупа S чији су сви r-подскупови садржани у Φ_1; или

постоји q_2'-подскуп скупа S чији су сви r-подскупови садржани у Φ_2'.

У другом случају из индуктивне претпоставке следи да бар за један број $j \in \{2, \ldots, m\}$ постоји q_j-подскуп скупа S чији су сви r-подскупови садржани у Φ_j. Тиме је доказ последице завршен. ■

Напомена 4. Број $R(q_1, q_2; r)$ зове се (општи) *Ремзијев број.*

Одређивање Ремзијевих бројева је врло тешко. Ево неких горњих (доњих) процена:

$$25 \leqslant R(4, 5; 2) \leqslant 28,$$
$$34 \leqslant R(4, 6; 2) \leqslant 44.$$

Надамо се да ће низ задатак који следе илустровати снагу Ремзијеве теореме.

Задаци

1. У групи од 100 људи постоји или тројка међусобних незнанаца или четворка међусобних познаника. Доказати.
2. За свако $m \geqslant 3$ постоји најмањи број C_m такав да је $C_m \leqslant n$ и важи следеће: ако од n тачака у равни никоја тројка није колинеарна, онда m од њих чине темена конвексног m-тоугла. Доказати.
3. За $q_1, q_2, a_3 \geqslant 2$ постоји број $R(q_1, q_2, q_2; 2)$. Доказати.
4. Ако странице петоугла обојимо плавом, а дијагонале црном бојом, добијамо потпуни 5-граф, који не садржи монохроматски 3-подграф. Зато је $R(3, 3; 2) = 6$. Образложити.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Veljan, *Konačna matematika* (skripta), Zagreb, 1987.
2. И. Р. Виленкин, *Комбинаторика*, Наука, Москва, 2005
3. A. Vrba, *Kombinatorika*, MFF, Praha 2008.
4. *Квант*, 1978, br. 7.
5. П. Младеновић, *Комбинаторика*, 3. изд, Друштво математичара Србије, Београд, 2001.
6. V. Simonović, *Uvod u konačnu matematiku*, Beograd, 1973.

Lj. Jonkea 17, Slatina, Hrvatska
E-mail: mobile@calco.hr