Др Владимир Јанковић

ЗАВИСНОСТ РЕШЕЊА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ОД ПОЧЕТНИХ УСЛОВА

0. Увод

Понекад је важно знати како се решење диференцијалне једначине понаша у зависности од почетних услова. Таква ситуација се често појављује у варијационом рачуну и оптималном управљању. Зато није чудно што се та проблематика врло добро обрађује управо у литератури из ове области. У књигама [1] и [2] аутори разматрају решење Кошијевог проблема

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(\tau) = \xi,$$

као функцију три променљиве $x(t, \tau, \xi)$, где се под њеном вредношћу у тачки (t, τ, ξ) подразумева вредност решења Кошијевог проблема у тачки t. У класичном случају, када је функција $f(t, x)$ непрекидна и има непрекидан парцијални извод по x, доказано је да је функција $x(t, \tau, \xi)$ дефинисана на отвореном скупу и да је непрекидно диференцијабилна. При том су експлицитно дати парцијални изводи ове функције по све три њене променљиве.

У овом тексту дајемо преглед те теорије, јер сматрамо да је она интересантна за шири круг математичара.

У првом параграфу је дат апарат неопходан за разумевање другог параграфа. Уводе се простори функција $C_n^k[t_0, t_1]$ и оператори дефинисани на њима. Прво се уводе два линеарна ограничена оператора: оператор инклузије и оператор диференцирања. Затим се уводе два нелинеарна оператора: оператор Немицког и оператор евалуације. За последња два оператора је доказано да су непрекидно диференцијабилни.

У другом параграфу се Кошијев проблем трансформише у проблем имплицитне функције, онако како је то урађено у књизи [2]. Применом класичне теореме о имплицитној функцији на тако добијени проблем добија се да је функција $x(t, \tau, \xi)$ дефинисана на отвореном скупу и да је непрекидно диференцијабилна.

Изостављени су докази теорема које се појављују у стандардним универзитетским уџбеницима, или које се доказују на сличан начин као неке теореме из тих уџбеника.

1. О просторима $C_n^k[t_0, t_1]$

Ако су k и n цели бројеви, $k \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, под $C_n^k[t_0, t_1]$ подразумевамо скуп k пута непрекидно диференцијабилних функција које пресликавају одсечак $[t_0, t_1]$ у простор R^n. Ако је $k = 0$, горњи индекс k изостављамо, а под нула пута непрекидно диференцијабилним функцијама подразумевамо непрекидне функције. Ако је $n = 1$, доњи индекс n изостављамо. Овај скуп постаје реалан векторски простор са операцијама сабирања и множења скаларом дефинисаним на стандардан начин. Норма у овом простору може да се дефинише на разне начине, о чему говори следећа теорема.

Теорема 1.1. *Формулама*

$$\|x(\cdot)\| = \max_{0 \leqslant i \leqslant k} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|x^{(i)}(t)\|,$$

$$\|x(\cdot)\|_p = \left(\sum_{i=0}^{k} (\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|x^{(i)}(t)\|)^p \right)^{1/p},$$

$$\|x(\cdot)\|' = \max\{ \max_{0 \leqslant i < k} \|x^{(i)}(t_0)\|, \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|x^{(k)}(t)\| \},$$

$$\|x(\cdot)\|'_p = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \|x^{(i)}(t_0)\|^p + (\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|x^{(k)}(t)\|)^p \right)^{1/p},$$

где је $p \geqslant 1$, дефинисане су еквивалентне норме $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|'_p$ на простору $C_n^k[t_0, t_1]$. У односу на њих овај простор је комплетан, тј. Банахов.

Следећа теорема разматра два веома важна ограничена линеарна оператора чији су домени и кодомени напред уведени Банахови простори.

Теорема 1.2. a) *Ако је $k > 0$, онда је $C_n^k[t_0, t_1] \subseteq C_n^{k-1}[t_0, t_1]$. Оператор инклузије $I_n^k \colon C_n^k[t_0, t_1] \to C_n^{k-1}[t_0, t_1]$, дефинисан са $I_n^k x(\cdot) = x(\cdot)$, линеаран је и ограничен.*

b) *Ако је $k > 0$, оператор диференцираа $D_n^k \colon C_n^k[t_0, t_1] \to C_n^{k-1}[t_0, t_1]$, дефинисан са $D_n^k x(\cdot) = \dot{x}(\cdot)$, линеаран је и ограничен.*

Оператор Немицког је пресликавање које функцији $x(t)$ кореспондира функцију $f(t, x(t))$. Следећа теорема описује његове особине.

Теорема 1.3. a) *Нека је G отворен скуп у $R \times R^n$. Тада је скуп*

$$D = \{ x(\cdot) \in C_n[t_0, t_1] \mid (\forall t \in [t_0, t_1])(t, x(t)) \in G \}$$

отворен у $C_n[t_0, t_1]$.

b) *Нека је функција $f(t, x) \colon G \to R^m$ непрекидна. Оператор Немицког $F(x(\cdot))(t) \colon D \to C_m[t_0, t_1]$, који се дефинише са*

$$F(x(\cdot))(t) = f(t, x(t)),$$

непрекидан је.

c) *Ако функција f има непрекидан парцијални извод по x, онда је оператор Немицког F непрекидно диференцијабилан и*

$$F'(x(\cdot))h(\cdot)(t) = f_x(t, x(t))h(t).$$

Доказ. a) Нека је $x(\cdot) \in D$. График $\Gamma x(\cdot)$ функције $x(\cdot)$ је компактан подскуп од G. Зато постоји $r > 0$, такво да је (затворена) r-околина $\Gamma_r x(\cdot)$ графика $\Gamma x(\cdot)$ такође подскуп од G. Како је $B[x(\cdot), r] \subseteq \Gamma_r x(\cdot)$, следи да је кугла $B[x(\cdot), r]$ садржана у скупу G. Дакле, скуп D је околина произвољне тачке $x(\cdot)$ садржане у њему. Зато је скуп D отворен.

b) Нека је $h(\cdot) \in C_n[t_0, t_1]$, $\|h(\cdot)\| \leqslant r$. Имамо да је

$$\begin{aligned} &d(F(x(\cdot)+h(\cdot)), F(x(\cdot))) = \|F(x(\cdot)+h(\cdot)) - F(x(\cdot))\| \\ &= \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|F(x(\cdot)+h(\cdot))(t) - F(x(\cdot))(t)\| = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|f(t, x(t)+h(t)) - f(t, x(t))\| \\ &\qquad \leqslant \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \omega(f, \Gamma_r x(\cdot), \|h(\cdot)\|) = \omega(f, \Gamma_r x(\cdot), \|h(\cdot)\|). \end{aligned}$$

Скуп $\Gamma_r x(\cdot)$ је компактан, а функција f је непрекидна на њему. Зато је функција f равномерно непрекидна на скупу $\Gamma_r x(\cdot)$. Ако $h(\cdot)$ тежи 0, онда и $\|h(\cdot)\|$ тежи 0, па самим тим и $\omega(f, \Gamma_r x(\cdot), \|h(\cdot)\|)$ тежи 0. Тим пре $d(F(x(\cdot)+h(\cdot)), F(x(\cdot)))$ тежи 0, тј. $F(x(\cdot)+h(\cdot))$ тежи $F(x(\cdot))$. Дакле, оператор Немицког F је непрекидан у произвољној тачки $x(\cdot)$ скупа D. Зато је он непрекидан на скупу D.

c) Нека је $x(\cdot) \in D$. Линеарни оператор $A(x(\cdot)) : C_n[t_0, t_1] \to C_m[t_0, t_1]$, који се дефинише са

$$A(x(\cdot))h(\cdot)(t) = f_x(t, x(t))h(t),$$

ограничен је. Заиста,

$$\begin{aligned} \|A(x(\cdot))\| &= \sup_{\|h(\cdot)\| \leqslant 1} \|A(x(\cdot))h(\cdot)\| = \sup_{\|h(\cdot)\| \leqslant 1} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|A(x(\cdot))h(\cdot)(t)\| \\ &= \sup_{\|h(\cdot)\| \leqslant 1} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|f_x(t, x(t))h(t)\| = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \sup_{\|h(\cdot)\| \leqslant 1} \|f_x(t, x(t))h(t)\| \\ &\leqslant \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \sup_{\|h(\cdot)\| \leqslant 1} \|f_x(t, x(t))\| \|h(t)\| \leqslant \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|f_x(t, x(t))\| < +\infty. \end{aligned}$$

Нека је $r > 0$, такво да је $\Gamma_r x(\cdot) \subseteq G$. Нека је $h(\cdot) \in C_n[t_0, t_1]$, $\|h(\cdot)\| \leqslant r$. Како је $\Gamma(x(\cdot)+h(\cdot)) \subseteq \Gamma_r x(\cdot)$, имамо да је

$$\begin{aligned} &\|F(x(\cdot)+h(\cdot)) - F(x(\cdot)) - A(x(\cdot))h(\cdot)\| \\ &\qquad = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|f(t, x(t)+h(t)) - f(t, x(t)) - f_x(t, x(t))h(t)\| \\ &\qquad \leqslant \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|f_x(t, x(t)+\theta h(t)) - f_x(t, x(t))\| \|h(t)\| \\ &\qquad \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|f_x(t, x(t)+\theta h(t)) - f_x(t, x(t))\| \|h(\cdot)\| \\ &\qquad \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \omega(f_x, \Gamma_r x(\cdot), \|h(\cdot)\|) \|h(\cdot)\| = \omega(f_x, \Gamma_r x(\cdot), \|h(\cdot)\|) \|h(\cdot)\|. \end{aligned}$$

Како $\omega(f_x, \Gamma_r x(\cdot), \|h(\cdot)\|)$ тежи 0 када $h(\cdot)$ тежи 0, оператор $A(x(\cdot))$ је Фрешеов извод оператора Немицког F у тачки $x(\cdot)$. Непрекидност оператора $A(x(\cdot))$ по $x(\cdot)$ доказује се на исти начин на који се доказује непрекидност оператора Немицког у тачки b). ■

На израз $x(t)$ најчешће гледамо као на функцију једне променљиве, броја t. Понекад је корисно на њега гледати као на функцију двеју променљивих: функције $x(\cdot)$ и броја t. То пресликавање називамо оператор евалуације. У следећој теореми наводе се његова својства.

Теорема 1.4. *Оператор евалуације* $ev\colon C_n^1[t_0,t_1] \times (t_0,t_1) \to R^n$, *који се дефинише са*

$$ev(x(\cdot), t) = x(t),$$

непрекидно је диференцијабилан и

$$\begin{aligned} ev_{x(\cdot)}(x(\cdot), t)h(\cdot) &= h(t), \\ ev_t(x(\cdot), t) &= \dot{x}(t). \end{aligned}$$

Доказ. Оператор евалуације ev је ограничен линеарни оператор по $x(\cdot)$. Зато је он јако диференцијабилан по $x(\cdot)$ и

$$ev_{x(\cdot)}(x(\cdot), t)h(\cdot) = ev(h(\cdot), t) = h(t).$$

Како је

$$\begin{aligned} &\|ev_{x(\cdot)}(x(\cdot), t) - ev_{x(\cdot)}(\bar{x}(\cdot), \bar{t})\| \\ &\quad = \sup_{\|h(\cdot)\| \leqslant 1} \|ev_{x(\cdot)}(x(\cdot), t)h(\cdot) - ev_{x(\cdot)}(\bar{x}(\cdot), \bar{t})h(\cdot)\| = \sup_{\|h(\cdot)\| \leqslant 1} \|h(t) - \bar{h}(t)\| \\ &\qquad \leqslant \sup_{\|h(\cdot)\| \leqslant 1} \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|\dot{h}((1-\theta)t + \theta\bar{t})\| \mid t - \bar{t} \mid \leqslant \mid t - \bar{t} \mid, \end{aligned}$$

парцијални извод оператора евалуације ev по променљивој $x(\cdot)$ је непрекидан у призвољној тачки домена $(\bar{t}, \bar{x}(\cdot))$. Зато је он непрекидан на целом свом домену.

Јасно је да је оператор евалуације ev диференцијабилан по променљивој t и да је

$$ev_t(x(\cdot), t) = \dot{x}(t).$$

Како је

$$\begin{aligned} &\|ev_t(x(\cdot), t) - ev_t(\bar{x}(\cdot), \bar{t})\| = \|\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(\bar{t})\| \\ &\qquad \leqslant \|\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)\| + \|\dot{\bar{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(\bar{t})\| \leqslant \|\dot{x}(\cdot) - \dot{\bar{x}}(\cdot)\| + \|\dot{\bar{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(\bar{t})\|, \end{aligned}$$

парцијални извод оператора евалуације ev по променљивој t је непрекидан у призвољној тачки домена $(\bar{t}, \bar{x}(\cdot))$, па је он непрекидан на целом свом домену. ■

2. Кошијева функција обичне диференцијалне једначине

Нека је G отворен скуп у $R \times R^n$ и нека је $f(t,x)\colon G \to R^n$ непрекидна функција која има непрекидан парцијални извод по x. Непрекидно диференцијабилна функција $x(\cdot)\colon I \to R^n$, где је I интервал, јесте решење диференцијалне једначине

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

ако је $(t, x(t)) \in G$ и $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, за свако $t \in I$. Често се разматрају решења диференцијалне једначине (1) која задовољавају почетни услов

$$x(\tau) = \xi, \tag{2}$$

где је $(\tau, \xi) \in G$. Проблем (1), (2) се назива Кошијев проблем. Следеће две теореме се могу наћи у свим уџбеницима обичних диференцијалних једначина. У теоремама се ради о егзистенцији и јединости решења Кошијевог проблема.

Теорема 2.1. *Нека је $(\tau, \xi) \in G$. Постоји решење $x(\cdot)$ диференцијалне једначине (1) које задовољава услов* (2).

Теорема 2.2. *Нека су $x(\cdot), y(\cdot)\colon I \to R^n$ два решења диференцијалне једначине* (1). *Ако је $x(\tau) = y(\tau)$ за неко $\tau \in I$, онда је $x(t) = y(t)$ за свако $t \in I$.*

Нека је $(\tau, \xi) \in G$. Према Теореми 2.1, постоји бар једно решење диференцијалне једначине (1), које задовољава услов $x(\tau) = \xi$, а према теореми 2.2 таква решења се могу комбиновати. Претпоставимо да је пресликавање $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ комбинована функција свих таквих решења и да је $S(\tau, \xi)$ њен домен. Очигледно је да је $S(\tau, \xi)$ отворен интервал и да је пресликавање $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ интервала $S(\tau, \xi)$ у R^n решење наше диференцијалне једначине. Ставимо да је

$$S = \{(t, \tau, \xi) \in R \times G \mid t \in S(\tau, \xi)\}.$$

Функција $x(t, \tau, \xi)$ пресликава скуп S у простор R^n. Она се назива Кошијева функција диференцијалне једначине (1).

Теорема 2.3. *Кошијева функција $x(t, \tau, \xi)$ диференцијалне једначине* (1) *има следећа својства:*

a) $x_t(t, \tau, \xi) = f(t, x(t, \tau, \xi))$, *за свако* $(t, \tau, \xi) \in S$.

b) $x(\tau, \tau, \xi) = \xi$, *за свако* $(\tau, \xi) \in G$.

c) *Ако је $\tau' \in S(\tau, \xi)$, где је $(\tau, \xi) \in G$, онда је*

$$S(\tau', x(\tau', \tau, \xi)) = S(\tau, \xi), \quad x(t, \tau', x(\tau', \tau, \xi)) = x(t, \tau, \xi).$$

Доказ. Тврђења a) и b) су последице чињенице да је Кошијева функција $x(t, \tau, \xi)$, за фиксирано τ и ξ, посматрана као функција једне променљиве t, решење Кошијевог проблема (1), (2).

Нека је $\xi' = x(\tau', \tau, \xi)$, $x(t) = x(t, \tau, \xi)$, за $t \in S(\tau, \xi)$ и $x'(t) = x(t, \tau', \xi')$, за $t \in S(\tau', \xi')$. Функција $x(t)$ је решење диференцијалне једначине (1) које задовољава почетни услов $x(\tau') = \xi'$. Зато је $S(\tau', \xi') \supseteq S(\tau, \xi)$ и $x'(t) = x(t)$ за $t \in S(\tau, \xi)$. Функција $x'(t)$ је решење диференцијалне једначине (1) које задовољава почетни услов $x'(\tau) = x(\tau) = \xi$. Зато је $S(\tau', \xi') \subseteq S(\tau, \xi)$. Тиме је доказ тврђења c) комплетиран. ■

Теорема 2.4. *Скуп S је отворен подскуп од $R \times R \times R^n$, а Кошијева функција $x(t, \tau, \xi)$ је непрекидно диференцијабилна на њему.*

Доказ. Нека је $(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) \in S$. Доказаћемо да скуп S заједно са овом тачком садржи и неку њену околину и да је Кошијева функција $x(t, \tau, \xi)$ непрекидно диференцијабилна на тој околини.

Како је $S(\bar{\tau}, \bar{\xi})$ отворен интервал, који садржи тачке $\bar{t}$ и $\bar{\tau}$, то постоји затворен интервал $[t_0, t_1] \subseteq S(\bar{\tau}, \bar{\xi}))$, такав да $\bar{t}, \bar{\tau} \in (t_0, t_1)$. Са

$$F(\tau, \xi, x(\cdot)) = (\dot{x}(t) - f(t, x(t)), x(\tau) - \xi),$$

дефинишемо оператор

$$F(\tau, \xi, x(\cdot)) \colon G \times D \to C_n[t_0, t_1] \times R^n,$$

где је

$$D = \{\, x(\cdot) \in C_n^1[t_0, t_1] \mid (\forall t \in [t_0, t_1])(t, x(t)) \in G \,\}.$$

На основу теорема 1.2 и 1.3 можемо закључити да је оператор F непрекидно диференцијабилан.

Извод по $x(\cdot)$ оператора F у тачки $(\bar{\tau}, \bar{\xi}, \bar{x}(\cdot))$ дат је следећом формулом

$$F_{x(\cdot)}(\bar{\tau}, \bar{\xi}, \bar{x}(\cdot))h(\cdot) = (\dot{h}(t) - f_x(t, \bar{x}(t))h(t), h(\bar{\tau})).$$

Овај ограничени линеарни оператор пресликава простор $C_n^1[t_0, t_1]$ у простор $C_n[t_0, t_1] \times R^n$. Доказаћемо да је он бијекција и самим тим, према теореми о отвореном пресликавању, да је изоморфизам. Нека је $(y(\cdot), \eta) \in C_n[t_0, t_1] \times R^n$. Довољно је да докажемо да постоји јединствено $h(\cdot) \in C_n^1[t_0, t_1]$, које задовољава једнакост

$$F_{x(\cdot)}(\bar{\tau}, \bar{\xi}, \bar{x}(\cdot))h(\cdot) = (y(\cdot), \eta).$$

Последња једначина је еквивалентна са следећим системом

$$\begin{gathered} \dot{h}(t) - f_x(t, \bar{x}(t))h(t) = y(t), \ \text{за свако } t \in [t_0, t_1], \\ h(\bar{\tau}) = \eta. \end{gathered}$$

Ово је Кошијев проблем са линеарном диференцијалном једначином. Према познатој теореми из класичних курсева диференцијалних једначина, тај проблем има јединствено решење.

Према класичној теореми о имплицитној функцији, постоје $\delta > 0$ и непрекидно диференцијабилна функција $x(\tau, \xi) : B(\bar{\tau}, \delta) \times B(\bar{\xi}, \delta) \to C_n^1[t_0, t_1]$, такви да је

$$F(\tau, \xi, x(\tau, \xi)) = 0, \ \text{за свако } (\tau, \xi) \in B(\bar{\tau}, \delta) \times B(\bar{\xi}, \delta).$$

Имајући у виду како је дефинисан оператор F, последњу једнакост можемо да сведемо на

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau,\xi)(t) - f(t, x(\tau,\xi)(t)) &= 0, \quad \text{за свако } t \in [t_0, t_1],\\ x(\tau,\xi)(\tau) - \xi &= 0, \end{aligned}$$

за свако $(\tau,\xi) \in B(\bar\tau,\delta) \times B(\bar\xi,\delta)$. Дакле, $x(\tau,\xi)$ је решење Кошијевог проблема (1), (2). Зато је

$$x(\tau,\xi)(t) = x(t,\tau,\xi), \text{ за свако } (t,\tau,\xi) \in [t_0,t_1] \times B(\bar\tau,\delta) \times B(\bar\xi,\delta).$$

Одавде добијамо да је отворени скуп $(t_0,t_1) \times B(\bar\tau,\delta) \times B(\bar\xi,\delta)$ садржан у S и да је Кошијева функција $x(t,\tau,\xi) = ev(x(\tau,\xi),t)$ непрекидно диференцијабилна на том скупу. ■

Остаје да се нађу парцијални изводи Кошијеве функције $x(t,\tau,\xi)$ по све три њене променљиве. У наредном чланку биће изложено како се то ради.

ЛИТЕРАТУРА

1. Йоффе, А.Д., Тихомиров, В.М., *Теория экстремальных задач*, Наука, Москва, 1974.
2. Алексеев, В.М., Тихомиров, В.М., Фомин, С.В., *Оптимальное управление*, Наука, Москва, 1979.

Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд
E-mail: vjankovic@matf.bg.ac.rs

ОБАВЕШТЕЊА

МЕЂУНАРОДНА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Јуниорска балканска математичка олимпијада

Овогодишња Јуниорска балканска математичка олимпијада (JBMO) одржана је од 25. до 30. јуна у Сарајеву (БиХ), а учествовале су екипе 11 балканских земаља. Екипа Србије била је у саставу:

1. *Душан Шобот*, гимназија „J. J. Змај", Нови Сад,
2. *Бојан Рошко*, ОШ „Д. Максимовић", Зајечар,
3. *Лазар Мојсиловић*, ОШ „М. Кушић", Ивањица,
4. *Стефан Спалевић*, ОШ при Првој крагујевачкој гимназији, Крагујевац
5. *Душан Дробњак*, ОШ „А. Милосављевић", Београд,
6. *Срђан Стефановић*, ОШ „Н. Велимировић", Шабац.

Руководиоци екипе били су *Ђорђе Баралић*, Математички иниститут САНУ и *Славољуб Милосављевић*, ОШ „Чегар".

Наши такмичари освојили су једну златну медаљу (**Душан Шобот**), једну сребрну (*Лазар Мојсиловић*) и три бронзане медаље (*Бојан Рошко*, *Стефан Спалевић*, *Срђан Стефановић*). Екипно смо заузели четврто место.