Др Шефкет Арсланагић

НЕКЕ НОВЕ НЕЈЕДНАКОСТИ ИЗМЕЂУ БРОЈЕВНИХ СРЕДИНА

Доказивање неједнакости је веома интересантно подручје математике. Неједнакости између бројевних средина ту заузимају посебно мјесто. Најприје дефинишимо четири познате бројевне неједнакости за два позитивна броја a и b:

$$A=\frac{a+b}{2}\quad\text{(аритметичка средина)};\qquad G=\sqrt{ab}\quad\text{(геометријска средина)};$$

$$H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\quad\text{(хармонијска средина)};\qquad K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\quad\text{(квадратна средина)}.$$

Лако се доказује да важи неједнакост $H\leqslant G\leqslant A\leqslant K$, тј.

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \tag{1}$$

Једнакост у (1) важи само у случају када је $a=b$. О неједнакости (1) је писано пуно у разним књигама и часописима из математике, гдје су дати разни докази (алгебарски и геометријски) ове неједнакости.

Сада ћемо доказати да важи једна веома интересантна неједнакост која се односи на бројевне средине, а која гласи

$$A+G\leqslant K+H,\quad\text{тј.}$$

$$\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \tag{2}$$

Доказ. Очигледно, дата неједнакост (2) еквивалентна је, редом, сљедећим неједнакостима:

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}}$$

$$\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}\leqslant\frac{\frac{a^2+b^2}{2}-ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}}$$

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\leqslant\frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right)}$$

$$\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}}$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\leqslant a+b$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}+2\sqrt{ab}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+ab\leqslant a^2+2ab+b^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}-2\sqrt{ab}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+ab\geqslant 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}\right)^2\geqslant 0,$$

што је очигледно тачно. Једнакост у (2) важи ако и смао ако је $a=b$. ■

Сада се оправдано намеће питање да ли важи неједнакост $A+G\leqslant K+H$ за три позитивна броја a, b и c, тј.

$$\frac{a+b+c}{3}+\sqrt[3]{abc}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}. \tag{3}$$

Очигледно, једнакост у (3) важи у случају када је $a=b=c$, јер је тада $A=G=K=H$. Ако бисмо ову неједнакост (3) покушали да докажемо на сличан начин као што смо доказали неједнакост (2), прилично бисмо се намучили. Шта урадити? Покушаћемо са конкретним вриједностима – узмимо да је нпр. $a=1$, $b=2$ и $c=3$. Добијамо:

$$A=\frac{1+2+3}{3}=2,\qquad G=\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 3}=\sqrt[3]{6},$$

$$K=\sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}},\qquad H=\frac{3}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{18}{11}.$$

Сада добијамо

$$A + G = 2 + \sqrt[3]{6} > \frac{19}{5}. \tag{4}$$

Заиста, последња неједнакост је, редом, еквивалентна са:

$$\sqrt[3]{6} > \frac{9}{5}, \quad 6 > \frac{729}{125}, \quad 750 > 720,$$

што је тачно. Међутим,

$$K + H = \sqrt{\frac{14}{3}} + \frac{18}{11} < \frac{19}{5}. \tag{5}$$

Наиме, последња неједнакост је, редом, еквивалентна са:

$$\sqrt{\frac{14}{3}} < \frac{119}{55}, \quad \frac{14}{3} < \frac{119^2}{55^2}, \quad 14 \cdot 55^2 < 3 \cdot 119^2, \quad 42350 < 42843,$$

што је тачно. Из (4) и (5) слиједи да је, у овом случају,

$$A + G > K + H,$$

тј. важи супротна неједнакост неједнакости (3). Дакле, неједнакост (3) у општем случају није тачна.

Одавде закључујуемо да нема смисла говорити о генерализацији неједнакости (2) за случај бројевних средина A, G, K и H n позитивних бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Доказаћемо сада да за два позитивна броја важи неједнакост

$$H \cdot K \leqslant A \cdot G, \tag{6}$$

односно

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leqslant \frac{a + b}{2} \sqrt{ab}. \tag{7}$$

Неједнакост (7) је редом еквивалентна следећим:

$$\begin{gathered}
\frac{4ab}{a + b} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leqslant (a + b)\sqrt{ab} \\
16a^2b^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} \leqslant (a + b)^4 \cdot ab \\
8a^2b^2(a^2 + b^2) \leqslant ab(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \\
a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \geqslant 0 \\
(a - b)^4 \geqslant 0,
\end{gathered}$$

што је тачно, па важи и неједнакост (7), док једнакост важи за $a = b$.

Размотримо сада неједнакост (6) када су H, G, A и K хармонијска, геометријска, аритметичка и квадратна средина три позитивна броја a, b и c, дакле неједнакост

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}\sqrt[3]{abc}. \tag{8}$$

Неједнакост (8) је редом еквивалентна са

$$\frac{3abc}{ab+bc+ca}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}\sqrt[3]{abc}$$
$$\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{ab+bc+ca}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$
$$3\sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

За $a=1$, $b=2$ и $c=3$ претходна неједнакост постаје

$$3\sqrt{3}\sqrt[3]{36}\sqrt{14} \leqslant 6\cdot 11,$$

што је редом еквивалентно са

$$\sqrt{42}\sqrt[3]{36} \leqslant 22, \qquad 42^3\cdot 36^2 \leqslant 22^6, \qquad 1\,500\,282 \leqslant 1\,771\,561.$$

Дакле, неједнакост (8) је тачна за $a=1$, $b=2$ и $c=3$.

Остаје отворено питање да ли неједнакост (8) важи за било које $a,b,c>0$, те да ли има основа тврдити да важи генерализација неједнакости (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. M. Bencze, Š. Arslanagić, *A Mathematical Problem Book*, Grafičar promet, Sarajevo, 2008.

Универзитет у Сарајеву, Природно-математички факултет, Змаја од Босне 35, 71000 Сарајево, Босна и Херцеговина

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba