Др Ђоко Г. Марковић

ЈЕДАН КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПРИМЈЕР ПОЛИФОРМНОГ РЈЕШАВАЊА КОНСТРУКТИВНОГ ЗАДАТКА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

1. Примјена начела полиформности у настави математике

Суштина дидактичког принципа полиформности огледа се у перманентном инсистирању на интегралном сагледавању разноврсних приступа разумјевању и поимања проучаваних наставних феномена. Његово експлоатисање у пракси изискује од наставника одлично познавање и вјештину примјењивања најразноврснијих стручно-дидактичко-методичких могућности, а индукује интензивну мисаону активност ученика изражену квалитетним самопрегалачким радом и већом мотивацијом.

Зато у настави математике принцип полиформности треба да има универзалну улогу, која би била презентована оплемењивањем наставе разноврсним садржајима, средствима, поступцима и методама.

Када је ријеч о садржајима мисли се на избор таквих задатака који омогућавају већи број разноликих приступа при њиховом рјешавању и коришћењу очигледних средстава. Међутим, организовање таквих часова захтијева, адекватну примјену полиформности методских облика и методских појединости наставе, тј. њихових варијација, па и методолошких иновација на истом наставном часу.

Методски облици и методске појединости које наставник планира и примјењује током наставе базирају се на правовременом пулсирању дидактичких принципа, што се испољава у њиховом истовременом полиформно-кохезионом дејству, тј. интегралном дијалектичком јединству.

2. Један карактеристични примјер полиформног рјешавања конструктивног задатка у настави математике средње школе

Конструктивни задаци еуклидске геометрије рјешавају се, углавном, тако што се низом поступака своде на следеће основне конструкције:

1. Конструкција праве кроз двије различите тачке.
2. Одређивање пресјека двије праве.
3. Конструкција кружнице задатог центра која пролази датом тачком.
4. Одређивање пресјечних тачака кружнице и праве.
5. Одређивање заједничких тачака двије кружнице.

Под елементарном геометријском конструкцијом подразумијевамо сваки онај задатак чије се рјешење може свести на неки од наведених елементарних конструкција које се, дакле, могу извести само помоћу лењира и шестара.

Овдје ћемо на више начина рјешавати један карактеристични примјер конструктивног задатка.

Задатак 1. Конструисати троугао ако су му дате све три висине h_a, h_b и h_c.

Овај задатак се сматра једним од тежих конструктивних задатака елементарне геометрије, који можемо рјешавати на више различитих начина.

Задатак се може рјешавати на бар три елегантна начина од којих је онај рјешаван примјеном потенције тачке у односу на кружницу, по мојем поимању математичке љепоте ван конкуренције. Зато ћу овдје приказати више варијанти и указати на једноставност, тј. сложеност алгоритма од старта до циља при рјешавању задатог проблема.

а) *Анализа.* Означимо површину траженог троугла с P. Тада је $2P = ah_a = bh_b = ch_c$. Из $ah_a = bh_b$ слиједи

$$a : b = h_b : h_a, \tag{1}$$

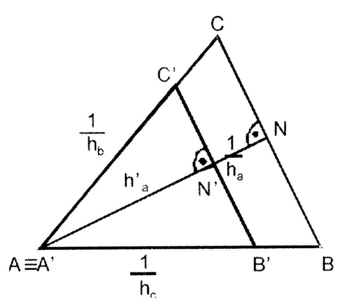
а из $bh_b = ch_c$ слиједи

$$b : c = h_c : h_b. \tag{2}$$

Проширимо ли разломке на десним странама једнакости, и то (1) са h_c, а (2) са h_a, добићемо $a : b = h_bh_c : h_ah_c$ и $b : c = h_ch_a : h_bh_a$, па тада можемо писати $a : b : c = h_bh_c : h_ah_c : h_bh_a$. Након дељења с $\dfrac{h_ah_bh_c}{h_ah_bh_c}$ добијамо

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Тражени троугао сличан је са троуглом $A'B'C'$ чије су странице једнаке реципрочним вриједностима висина троугла ABC.



Сл. 1

Конструкција. Конструишемо троугао $A'B'C'$ страница $A'B' = 1/h_c$, $B'C' = 1/h_a$, $C'A' = 1/h_b$. Означимо с h'_a, висину троугла $A'B'C'$ с подножјем N'. До рјешења долазимо хомотетијом с центром $A' \equiv A$ и коефицијентом хомотетије k таквим да је $\mathcal{H}_A^k(A'N') = A'N$, гдје је $A'N = h_a$. Паралела с правом $B'C'$ кроз тачку N ијече праву $A'C'$ у C, а праву $A'B'$ у B. Тиме је тражени троугао конструисан, слика 1.

Доказ. Троуглови ABC и $A'B'C'$ су слични (хомотетија чува сличност). Троугао ABC има висине h_a, h_b и h_c, па је то тражени троугао.

Дискусија. Рјешење је јединствено ако су h_a, h_b и h_c тако задате дужи да задовољавају неједнакости троугла.

б) Ово рјешење може се наћи у неким збиркама задатака у форми упутства у једној реченици, док се методологија препушта читаоцу. Ево једне верзије те конструкције.

Анализа. Означимо површину траженог троугла са P. Тада је $2P = ah_a = bh_b = ch_c$, одакле је

$$\frac{2P}{h_a h_b} = \frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{h_a h_b / h_c}.$$

Јасно је да су странице троугла ABC, тј. a, b и c пропорционалне страницама $a_1 = h_b$, $b_1 = h_a$ и $c_1 = \dfrac{h_a h_b}{h_c}$ троугла $A_1B_1C_1$, па су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ слични.

Конструкција. Треба конструисати $\triangle A_1B_1C_1$, а затим њему сличан троугао $\triangle ABC$, као у верзији а) овога задатка.

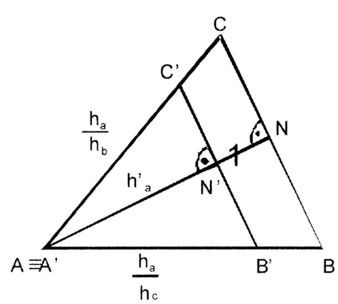
Да бисмо конструисали троугао $A_1B_1C_1$ неопходно је најприје конструисати страницу $c_1 = \dfrac{h_a h_b}{h_c}$, што се може учинити на основу $c_1 : h_b = h_a : h_c$ или $c_1 : h_a = h_b : h_c$, одређивањем непознате величине c_1 из пропорције гдје су остале три дужи познате. Тај елементарни задатак се ради већ у осмогодишњој школи. Даљи ток аргументисања овог задатка је сличан као у случајевима под а), в) и г).

в) *Анализа.* Означимо површину траженог троугла са P. Из $2P = ah_a = bh_b = ch_c$ добијамо

$$\frac{2P}{h_a} = \frac{a}{1} = \frac{b}{h_a/h_b} = \frac{c}{h_a/h_c}.$$

Дакле, странице a, b и c троугла ABC пропорционалне страницама $a' = 1$, $b' = \dfrac{h_a}{h_b}$ и $c' = \dfrac{h_a}{h_c}$ троугла $A'B'C'$. Тражени троугао ABC сличан је троуглу $A'B'C'$.

Конструкција. Конструишемо троугао $A'B'C'$ страница $A'B' = \dfrac{h_a}{h_c}$, $B'C' = 1$, $C'A' = \dfrac{h_a}{h_b}$. Означимо с h'_a, висину троугла $A'B'C'$ с подножјем N'. До рјешења долазимо хомотетијом с центром $A' \equiv A$ и коефицијентом хомотетије k таквим да је $\mathcal{H}_A^k(A'N') = A'N$, гдје је $A'N = h_a$. Паралела с правом $B'C'$ кроз тачку N сијече праву $A'C'$ у C, а праву $A'B'$ у B. Тиме је тражени троугао конструисан, слика 2.

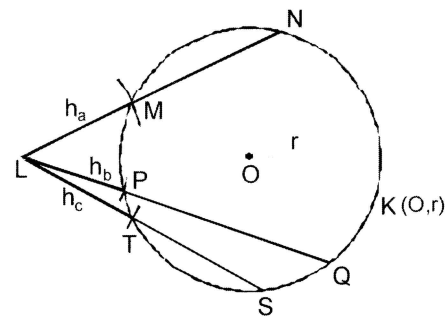


Сл. 2

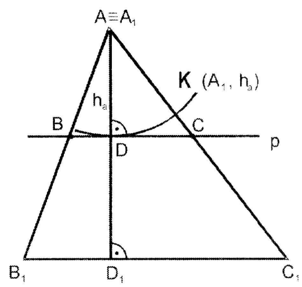
Доказ. Троуглови ABC и $A'B'C'$ су слични (хомотетија чува сличност). Троугао ABC има висине h_a, h_b и h_c, па је то тражени троугао.

Дискусија. Рјешење је јединствено ако су h_a, h_b и h_c тако задате дужи да задовољавају неједнакости троугла.

г) *Анализа.* Обиљежимо површину траженог троугла са P. Тада је $2P = ah_a = bh_b = ch_c$. Како је производ одсјечака сјечица повучених из неке тачке L ван кружнице $K(O,r)$ стална величина једнака потенцији тачке L у односу на кружницу $K(O,r)$, лако је одредити дужи које су пропорционалне страницама траженог троугла.



Слика 3



Слика 4

Конструкција. Конструишимо кружницу $K(O,r)$ произвољног полупречника (слика 3) и изаберимо ван ње тачку L, тако да је најмање растојање те тачке до кружнице мање од најкраће висине траженог троугла. Пресијецимо затим ту кружницу кружним луцима $K(L,h_a)$, $K(L,h_b)$, $K(L,h_c)$ у тачкама M, P и T. Повуцимо праве LM, LP и LT. Оне сијеку кружницу $K(O,r)$ у тачкама N, Q и S. На основу теореме о потенцији тачке у односу на кружницу имамо да је $LM\cdot LN = LP\cdot LQ = LT\cdot LS$, тј. $h_a a_1 = h_b b_1 = h_c c_1$. На тај начин конструисали смо странице троугла $A_1B_1C_1$, $a_1 = LN$, $b_1 = LQ$ и $c_1 = LS$ (слика 4), гдје је $A_1D_1 \perp B_1C_1$, тј. $A_1D_1 = h_{a_1}$. Са центром у тачки $A \equiv A_1$ конструишимо кружницу $K(A_1,h_a)$. Она сијече дуж A_1D_1 у тачки D. Права p која пролази кроз тачку D и паралелна је са B_1C_1 одређује на правим A_1B_1 и A_1C_1 тјемена B и C троугла ABC, док се тачка A поклапа са тачком A_1.

Доказ. Доказ слиједи из конструкције.

Дискусија. Задатак има једно рјешење под условом да дате висине задовољавају услове који се односе на неједнакости збира и разлике страница троугла.

д) *Анализа.* Задатак смо могли рјешавати и на низ других начина једноставним проналажењем конкретних примјера сличних троуглова траженом ABC. Ево још неколико уређених хомологних тројки страница које у таквим сличностима редом одговарају страницама $\triangle ABC$, тј. уређеној тројци (a,b,c).

Те тројке страница сличних троуглова траженом (које можемо лако конструисати, па самим тим задатак рјешити на различите начине) су и

$$\left(\frac{k}{h_a},\frac{k}{h_b},\frac{k}{h_c}\right),\ \left(\frac{k}{h_a/h_b},\frac{k}{1},\frac{k}{h_c/h_b}\right),\ \left(\frac{k}{1},\frac{k}{h_b/h_a},\frac{k}{h_c/h_a}\right),\ \left(\frac{k}{h_a/h_c},\frac{k}{h_b/h_c},\frac{k}{1}\right),$$
$$\left(\frac{k}{h_b},\frac{k}{h_a},\frac{k}{h_c/h_ah_b}\right),\quad \left(\frac{k}{h_c},\frac{k}{h_b/h_ah_c},\frac{k}{h_a}\right),\quad \left(\frac{k}{h_a/h_bh_c},\frac{k}{h_c},\frac{k}{h_b}\right),$$

гдје је $k\in\mathbf{R}^+$.

Лако је уочити да су такве и тројке $(h_{h_a},h_{h_b},h_{h_c})$, односно $(kh_{h_a},kh_{h_b},kh_{h_c})$, које можемо формирати од хомологних висина троугла чије су странице редом (h_a,h_b,h_c), што је евидентно ако се зна да је $2P=ah_a=bh_b=ch_c$ и $2P_1=h_ah_{h_a}=h_bh_{h_b}=h_ch_{h_c}$, одакле је

$$\frac{a}{h_{h_a}}=\frac{b}{h_{h_b}}=\frac{c}{h_{h_c}}=\frac{P}{P_1},\quad \text{односно}\quad \frac{a}{kh_{h_a}}=\frac{b}{kh_{h_b}}=\frac{c}{kh_{h_c}}=\frac{P}{kP_1}.$$

Ако пажљиво анализирамо све начине на који смо рјешавали овој задатак, видимо да је конструкција у случају под а) компликованија, јер треба посебно извршити још три елементарне конструкције дужи: $\dfrac{1}{h_a}$, $\dfrac{1}{h_b}$ и $\dfrac{1}{h_c}$. Такође и само аргументисање анализе је сложеније него у случају рјешења под б), в) и г). Сматрам да је конструкција верзије г) једноставнија од оне у примјерима б) и в) без обзира на то што се у тим случајевима за разлику од оног под а) не морају посебно конструисати странице a_1, b_1 и c_1.

Дакле, овај задатак, као што видимо, можемо рјешавати на цио спектар различитих начина. Јасно је да таква примјена начела полиформности индукује динамичке ефекте изучавања математике, што се огледа у свеобухватном и интегралном сагледавању и разумјевању датог задатка.

Коначно, полиформно поимање математичких феномена увијек се позитивно рефлектује на стварање трајних змања ученика, као једног од најзначајнијих циљева наставе уопште.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Пенавин, *Структура и класификација метода у настави аритметике и алгебре*, Завод за издавање уџбеника, Београд, 1971.
2. W. Lietzmann, *Methodik des mathematischen Unterrichts IV*, Heidelberg,1955.
3. Ђ. Г. Марковић, *Геометријски полиформизам*, 3 Макарије, Подгорица, 2006.
4. Ђ. Г. Марковић, *Нови погледи на методику наставе математике*, 3 Макарије, Подгорица, 2008.

E-mail: nemanjamk@cg.rs