**Драгољуб Милошевић**

# ЧЕТИРИ ДОКАЗА ЈЕДНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ ЗА ПРАВОУГЛИ ТРОУГАО

Реч је о следећој неједнакости

$$c + h > a + b,$$

где су $a$, $b$, $c$ странице ($c$ – хипотенуза) и $h$ хипотенузина висина правоуглог троугла.

*Доказ 1.* Како је $h > 0$, то је $h^2 > 0$. Користећи Питагорину теоему и једнакост $ab = ch$ $(= 2P)$, добијамо редом

$$c^2 + h^2 > a^2 + b^2,$$
$$c^2 + h^2 + 2ch > a^2 + b^2 + 2ab,$$
$$(c + h)^2 > (a + b)^2.$$

Будући да су $a$, $b$ и $c$ позитивне величине, из последње неједнакости следи $c+h > a + b$, што је и требало да се докаже.

*Доказ 2.* Због $c > a$ и $c > b$ је $c - a > 0$ и $c - b > 0$, па је $(c - a)(c - b) > 0$, односно $c^2 + ab > c(a + b)$, одакле, због $c > 0$, следи

$$c + \frac{ab}{c} > a + b.$$

С обзиром да је $\frac{ab}{c} = h$, последња неједнакост постаје $c + h > a + b$.

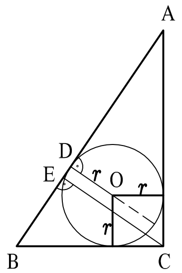
*Доказ 3.* Из познате неједнакости $a + b > c$ за странице троугла следи $(a + b - c)^2 > 0$, тј.

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2c(a + b) + 2ab > 0,$$

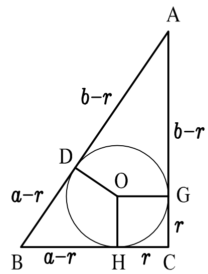
а одавде, због $a^2 + b^2 = c^2$ (Питагорина теорема) и $ab = ch$, следи

$$2c^2 - 2c(a + b) + 2ch > 0.$$

Дељењем леве и десне стране претходне неједнакости са $2c > 0$ добијамо $c - (a + b) + h > 0$, што је еквивалентно са $c + h > a + b$.




Слика 1




Слика 2

*Доказ 4.* Са слике 1 уочавамо да је $h = CE > 2 \cdot OD = 2r$, тј.

$$h > 2r, \tag{1}$$

($r$ – полупречник уписане кружнице правоуглог троугла). Даље, са слике 2 видимо да је

$$c = AB = BD + DA = (a - r) + (b - r),$$

односно $c = a + b - 2r$, тј.

$$2r = a + b - c. \tag{2}$$

На основу релација (1) и (2) добијамо $h > a + b - c$, тј. $c + h > a + b$.