Др Владимир Мићић

ОД ПРИРОДНИХ ДО РЕАЛНИХ БРОЈЕВА У СТАРИЈИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

Увод

Реформа образовног система је процес у којем се стално налазимо. Одлуке у вези с променама у настави математике проистичу из потреба да се садржаји и начин њихове обраде прилагоде остваривању циљева и задатака наставе у актуелним условима, уз уважавање савремених тековина наука које могу утицати на успешност њиховог остварења. Ту се, пре свега, ради о тековинама у оквиру математичких наука и методике математике, а потом у оквирима осталих наука које их подржавају (педагогија, психологија). Уверени смо да се у настави математике на било ком нивоу солидна стручна оспособљеност у области математике и њене методике ничим не могу надокнадити, не оспоравајући при томе да је познавање достигнућа из области психологије и педагогије (проверених кроз искуство, али и савремених) пожељно и може бити веома корисно.

Широко је прихваћен став да су главни носиоци савременог образовног система: матерњи језик и књижевност, математика, природне науке, друштвене науке, рачунарство. Морамо чувати статус свог предмета и, по могућности, поправити га. Афирмисати математику и као: саставни део опште културе, општеобразовни предмет, незаменљив апарат у заснивању и примени осталих наставних садржаја али и у свакодневном животу. Приликом усвајања коригованих наставних програма математике и пратећих дидактичко-методичких упутстава је преовладала свест о потреби оваквог деловања и тиме су створени повољни услови за њихово остварење.

За успешно учење најповољније би било поновити пут којим је човечанство прошло кроз историју. То је, наравно, неостварљиво у реалној настави математике (не само ње), па је важно извршити избор садржаја који ће ученике довести до нивоа с којег могу успешно наставити пут кроз математичке садржаје према циљевима који су програмом предвиђени.

Ученици старијих разреда основне школе су узраста од 11 до 15 година. Према Пијажеовој (Jean Piaget) периодизацији развоја математичког мишљења деце, широко прихваћеној и међу дидактичарима математике, они су изашли из *периода конкретних операција* и пролазе кроз *период формалних операција*. У значајној мери су овладали конкретним операцијама и у стању су да, постепено, прихвате потребу да се нова знања не усвајају само ослањајући се на акумулирано искуство, стечено путем опажања или у контакту са сличним објектима или садржајима. Односе се и критички према тврђењима с којима се срећу, не доживљавају непотребним наша настојања да их у нешто уверимо (докажемо им) или наш захтев да се сами у нешто увере (докажу). Такве способности ученика не смемо превиђати и тиме њихове могућности упасивити. Уобичајено је да се на овом узрасту, у оквирима програма математике и његове реализације, ученицима прво понуди обрада неких садржаја обогаћена локалним дедукцијама, по правилу без претензија да то доведе до строго заснованих теорија, да би се касније такав приступ проширивао а ниво формализације подизао. У већини образовних система се „пробијање леда" у овом смислу поверава геометријским садржајима. Такав избор или опредељење, предложени или наметнути од стране стручне и научне математичке јавности, наилази на озбиљна оспоравања међу реализаторима наставе математике с том популацијом. Уверени смо да је такав став утемељен на стварним тешкоћама у пракси, будући да су ученици стекли мало искустава у вези с геометријским објектима и доживљавају их као далеке, апстрактне творевине. Могућност њиховог приказивања сликама, чиме се у процес сазнавања укључује и визуелно опажање, тек делимично ублажава ове тешкоће. Приликом анализе остваривања наставе математике у старијим разредима основне школе у Србији (пре десетак година) доминирале су замерке на рачун покушаја раног увођења доказа у геометрију. Ако смо се сложили да је оправдано на овом узрасту почети са извођењем закључака, локалним дедукцијама, а тешко је почети с геометријским садржајима, можда је оправдано почети с алгебарским садржајима.

Учествовање у припремању уџбеничких комплета за наставу Математике у старијим разредима основне школе подстакло нас је да нека од својих размишљања, неке дилеме и опредељења у вези са остваривањем наставе, поделимо с читаоцима „Наставе математике". Определили смо се за четири теме о бројевима.

Дељивост бројева

Подсетимо да се математичка наука, али и настава математике, развијала кроз историју под снажним утицајем Еуклидових „Елемената", монументалног дела чијих је тринаест књига представљало образац остваривања идеала дедуктивне методе при изградњи математичких теорија. Првих шест књига односе се на планиметрију, наредне четири на теорију бројева, док се последње три односе на стереометрију. У књигама које се односе на теорију бројева срећемо строго засновану теорију дељивости бројева, бар у мери у којој се то може тврдити за геометрију. Чудно је да ова чињеница није имала значајнијег утицаја на заснивање наставе математике и није допринела бар равноправном третирању тих садржаја у настави. Природни бројеви су, иако апстрактни објекти, ученицима блиски и већ ускладиштени у њихов ментални свет, а кроз млађе разреде стекли су и одређене вештине и навике за бављење њима. Због тога су, по нашем мишљењу, у узрасту од 11–12 година, они подесни објекти за почетне кораке у изграђивању теорије.

У скупу **N** (или **Z**) дефинисана релација „бити дељив“ је подесна да се неке чињенице у вези с њом доказују. Апарат којим се при томе користимо је једноставан и он неће изазвати отпор код ученика петог (или шестог) разреда. При томе је важно да сваком својству које се доказује претходе уводне активности, кроз које ће ученици наслутити опште тврђење и осетити потребу да их докажу, како се не би исцрпљивали појединачним случајевима. Теореме у овој области су често еквиваленцијског типа, али се срећу и теореме импликацијског типа. Већина ученика овог узраста не осећа потребу за доказивањем неопходности, него се задовољавају доказом довољности у тврђењима еквиваленцијског типа. Покушаћемо их уверити да је то једнако важно. Тешко је очекивати да ће се, код тврђења импликацијског типа, ученици упитати да ли важи и обрат тврђења. Ту ми ступамо на сцену.

Дефиниција. Природан број a је дељив природним бројем b ако постоји природан број k, такав да је $a = bk$.

Теорема 1. *Ако су природни бројеви a_1 и a_2, $a_1 > a_2$, дељиви природним бројем b, онда су њихов збир $a_1 + a_2$ и њихова разлика $a_1 - a_2$ дељиви са b.*

Теорема 2. *Ако су a_1 и a_2 природни бројеви, $a_1 > a_2$, и један од њих је дељив природним бројем b а други није, онда њихов збир $a_1 + a_2$ и њихова разлика $a_1 - a_2$ нису дељиви са b.*

Док се Теорема 1, у неком облику, среће обавезно приликом обраде ових садржаја, Теорема 2 се, по правилу, изоставља. Међутим, управо она нам омогућава да једноставно доказујемо многа тврђења из ове области. Важно је исто тако нагласити да су обе ове теореме импликацијског типа и да њихови обрати не важе. За обрат првог дела Теореме 1 доказ нам, на пример, обезбеђује једноставан контрапример:

$$63 = 25 + 38, \quad 7 \mid 63 \quad \text{али} \quad 7 \nmid 25 \text{ и } 7 \nmid 38.$$

Уверени смо да ће ученици, посебно ако и сами креирају неки контрапример, ово прихватити као доказ. Мишљења смо да ће они, уз нашу подршку путем указивања на искуства из реалног окружења и подесне примере из математике, развити известан осећај за неке од почетних елемената математичке логике, без њиховог помињања. До доказа преко поменутог контрапримера води нас неколико корака. Подсетићемо се, само за нашу употребу, да важи:

1) Тврђење које се односи на неку променљиву (слово које има свој домен) која није квантификована, сматрамо универзално квантификованим.
2) Негација универзално квантификоване реченице еквивалентна је егзистенцијално квантификованој негацији те реченице.
3) Негација импликације еквивалентна је конјункцији претпоставке и негације закључка те импликације.
4) Негација конјункције два исказа је еквивалентна дисјункцији негација тих исказа.

На пример, први део Теореме 1 у ствари гласи (ово је, опет, само за нашу употребу):

Теорема 1. За свака три природна броја a_1, a_2, b важи: ако су a_1 и a_2 дељиви са b, онда је $a_1 + a_2$ дељив са b.

Доказујемо да обрат овог тврђења не важи, односно да важи негација тог обрата. Обрат тврђења гласи:

За свака три природна броја a_1, a_2, b важи: ако је збир $a_1 + a_2$ дељив са b, онда су бројеви a_1 и a_2 дељиви са b.

Негација овог тврђења је негација универзално квантификоване импликације, па је то, на основу 2) и 3), егзистенцијално квантификована конјункција њене претпоставке и негације њеног закључка. Примењујући и 4) налазимо да треба доказати да важи:

Постоје природни бројеви a_1, a_2, b такви да важи: збир $a_1 + a_2$ је дељив са b и број a_1 није дељив са b или број a_2 није дељив са b.

Наведени контрапример показује да таква три природна броја заиста постоје. Дакле, тачна је негација обрата наше теореме, што значи да њен обрат није тачан.

Децимални запис разломка

Ученици су се у млађим разредима срели са дељењем с остатком у скупу природних бројева, може се рећи чак да су стекли рутину у том поступку. Због тога предлажемо да се формулише и докаже теорема:

Теорема 3. *За свако $a \in \mathbf{N}_0$ и свако $b \in \mathbf{N}$ постоје јединствени $q \in \mathbf{N}_0$ и $r \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$, такви да је $a = bq + r$.*

Ако се определимо за алгебарски доказ ове теореме, морамо се користити чињеницама у које ученици не сумњају, па их можемо подстаћи да сами закључе, уз позивање на бројевну праву, да важи:

Теорема о најмањем елементу. Сваки непразан подскуп скупа природних бројева садржи свој најмањи елемент. Тај елемент је одређен, јединствен.

Архимедово својство. За свака два природна броја a и b постоји природан број c, такав да је $a < bc$.

Последица. *При дељењу броја $a \in \mathbf{N}_0$ бројем $b \in \mathbf{N}$ остатак може бити тачно један од бројева $0, 1, \ldots, b-1$.*

Да бисмо се припремили за налажење децималног записа разломка, можемо се на неколико примера подсетити поступка дељења природних бројева, на основу којег је изведен поступак „писменог дељења“. Основу за налажење децималног записа разломка налазимо у његовом представљању у облику збира разломака чији су имениоци степени броја 10 – зовемо их децимални разломци. Ако синтагму „је ознака за“ заменимо симболом „:=“, имамо да је

$$0{,}1 := \frac{1}{10}, \quad 0{,}01 := \frac{1}{100}, \quad \ldots, \quad 1{,}43 := 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100}.$$

Ми смо тога свесни, а у одељењу и стандардној комуникацији замењујемо га уобичајеним „$=$“. Децимални запис разломка налазимо једноставно у случајевима када је именилац степен броја 10. У таквим случајевима запис садржи коначно много цифара. Да ли само у тим случајевима?

Теорема 4. *Несводљив разломак a/b, $a, b \in \mathbf{N}$ има коначан децимални запис ако и само ако број b нема простих делилаца различитих од* 2 *и* 5*.*

Иако се програмом не предвиђа доказ ове важне теореме, надамо се да ће довољан број примера и пратећи коментари уверити ученике да се поступак налажења коначног децималног записа разломка без позивања у помоћ познатог поступка „писменог дељења“ може остварити без тешкоћа у сваком од примера које теорема обухвата. То ће им помоћи да се поступком проширивања разломка, приликом којег ће именилац постати степен броја 10, слободно користе.

Једноставним поступком налажења записа разломка, датог у облику његовог коначног децималног записа, у облику количника природних бројева нећемо се овде бавити.

Приликом увођења разломака у свет бројева уверили смо се да је разломак $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbf{N}$, једнак количнику бројева a и b. Показаћемо на једном примеру како можемо доћи до децималног записа разломка, дакле количника два природна броја, у случајевима када бројилац (дељеник) није дељив имениоцем (делиоцем).

Пример. Напиши децимални запис разломка $\dfrac{327}{40}$.

Именилац можемо написати у облику $40 = 2^3 \cdot 5$. Дакле, налазимо се у условима формулисане теореме, па до децималног записа можемо доћи проширивањем разломка бројем $5^2 = 25$:

$$\frac{327}{40} = \frac{327 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{8175}{1000} = 8{,}175$$

До истог записа можемо доћи упознатим поступком дељења природних бројева. Тиме се овде нећемо бавити.

Примери који следе уводе нас у појам бесконачног периодичног децималног записа.

Пример. Напиши децимални запис разломка $\dfrac{17}{12}$.

Уочавамо да је $12 = 2^2 \cdot 3$, што значи да именилац има простих делилаца различитих од 2 и 5. Дељењем, без тешкоћа, налазимо да је

$$17 : 12 = 1{,}4166\cdots = 1{,}41\dot{6} = 1{,}41(6).$$

Добили смо периодичан децимални запис; понавља се цифра 6. Овде можемо увести појам *претпериода* и *периода.* Уз нешто више тешкоћа урадићемо и следећи пример.

Пример. Напиши децимални запис разломка $\dfrac{209}{700}$.

Именилац $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ има простих делилаца различитих од 2 и 5, па његов децимални запис није коначан. Поступком дељења налазимо

$$209 : 700 = 0{,}29857142857142\ldots = 0{,}29(857142),$$

где се група цифара 857142 понавља (период је). Ученике морамо уверити да ће се таква ситуацији појавити у сваком од случајева када децимални запис није коначан. За то је довољно позвати се на раније доказану теорему да се приликом дељења с остатком бројем b могу појавити остаци $0, 1, 2, \ldots, b-1$ и нашу претпоставку да децимални запис није коначан, па се остатак 0 неће појавити. Због тога ће се после највише $b-1$ корака остатак поновити (Дирихлеов принцип). Употпунили смо претходну теорему

Теорема 5. *Сваки разломак има или коначан или бесконачан периодичан децимални запис. Запис је коначан ако именилац нема простих делилаца различитих од* 2 *и* 5 *(облика је* $2^m \cdot 5^n$, $m, n \in \mathbf{N}_0$*). Запис је бесконачан периодичан ако именилац има простих делилаца различитих од* 2 *и* 5.

У одељењу ћемо овде наћи места за неколико урађених примера који ће ученицима илустровати примену ове теореме као критеријума за утврђивање да ли је запис коначан или бесконачан периодичан. Налажење записа у облику количника два природна броја разломка који је задат својим децималним записом је озбиљан „посао“ на нивоу основне школе. Ми знамо да се ту ради о збировима конвергентних геометријских редова али знамо, исто тако, да су нам у одељењу ученици ОШ. Због тога ћемо се задовољити с неколико урађених примера.

Записи неправих разломака у облику мешовитих бројева

Писање тзв. неправих разломака у облику мешовитих бројева припада корпусу традиционалних, наслеђених садржаја. Свесни смо да су то разломци које без икаквих тешкоћа можемо записивати у неком од већ упознатих облика, а њихов опстанак у програмима математике оправдава се распрострањеном појавом у свакодневном животу (у продавници, на пијаци, ...). У програмима и наставној пракси многих земаља може се уочити настојање да се присуство мешовитих бројева сведе на разумну меру, углавном у функцији солидног разумевања њихове практичне примене, иако се и ту уочава постепено преношење нагласка на коришћење стандардних јединица за мерење. Новим, коригованим наставним програмом математике предвиђено је да се, у оквиру наставне теме Разломци, као посебне наставне јединице обраде: 1. Појам разломка облика $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbf{N}$; 2. Децимални запис разломка. Мешовити бројеви помињу се у дидактичко-методичким упутствима (Начин остваривања програма), где се налази реченица „Код операција с тзв. мешовитим бројевима довољно је узимати само најпростије случајеве“. Због тога се свако инсистирање на сложеним операцијама с мешовитим бројевима мора препознати као непоштовање Наставног програма и непотребно оптерећење наставе тим садржајима. Уважавајући овакав приступ појму мешовитог броја определили смо се за, по нашем мишљењу рационално, решење да се садржаји у вези с њима обраде у оквиру једне лекције. При томе смо се ограничили на проблем превођења записа неправог разломка у облику мешовитог броја у неправи разломак и обрнуто и упоређивање разломака који су записани у облику мешовитих бројева, једноставне примере сабирања и одузимања тако записаних разломака и решавање једноставних једначина у којима се они појављују. У Збирци задатака смо учинили мали уступак традиционалној настави и уврстили три најједноставнија задатка у вези с множењем и дељењем тако записаних разломака, при чему се искрено надамо да ће се ученици приликом њиховог решавања опредељивати за превођење разломака записаних у облику мешовитих бројева у стандардне записе облика и извођење операција с тако записаним разломцима. Наставници би их у том смеру морали упућивати.

Са жаљењем морамо констатовати да се, вероватно збор велике инерције образовног система и његово тешко извођење из затеченог стања, у наставној пракси, али и у ваннаставним активностима, такви записи разломака и чак веома сложене операције с њима јављају непримерено често, што је, по нашем мишљењу, недопустиво и штетно. То је у суштинском нескладу са савременим настојањима у настави математике да се инсистира на јасном формулисању захтева и тврђења и често има непријатан призвук „сачекивања ученика“, покушаја да се они збуне или доведу у недоумицу. Шта тек рећи за настојања да се настава оптерети и сложеним задацима с множењем (дељењем) разломака записаних у облику мешовитих бројева? Колико смо се пута у одељењу срели с грешкама типа: $3\frac{2}{5}-2\frac{3}{4}=3-2+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$ или $2\frac{3}{7}\cdot 5\frac{2}{3}=10\frac{6}{21}=10\frac{2}{7}$? Оне би се неупоредиво ређе појављивале ако бисмо се користили записима у облику збира целих делова и разломљених делова мешовитог броја. Али, за то нам не требају мешовити бројеви.

Ирационални бројеви

У свакодневном животу човек се током развоја цивилизација срео с потребом мерења, пре свега мерења дужине дужи и површине дела површи Земље. То је представљало озбиљан подстицај да се појмови бројева којима оперише, „света бројева“ које користи, развијају, проширују, што је морало утицати и на развој математике и наставе математике. Већ се у млађим разредима ОШ срећемо с поступком уситњавања изабране јединице за мерење дужине, како би се омогућило мерење дужине шире класе дужи; он потиче још из античких времена.

Дефиниција. Дужи a и b су *самерљиве* ако постоје природни бројеви m и n, такви да је $m\cdot a=n\cdot b$ тј. $b=\frac{m}{n}\cdot a$.

Одатле се види да је разломак $\frac{m}{n}$ мерни број дужине дужи b ако се за јединицу мере за дужину изабере a. У Питагориној школи (VI век пре н.е.) постављено је питање које се природно намеће: „Јесу ли сваке две дужи самерљиве?“ Негативан одговор до којег су дошли:

„*Постоје дужи које нису самерљиве.*“

изазвао је озбиљну кризу у математици тог времена. Они су доказали да страница и дијагонала квадрата нису самерљиве.

У већини образовних система је прихваћено да се у VII разреду (или на узрасту који му одговара) у наставу математике уведе појам ирационалног броја и структура **R** реалних бројева. То је, наравно, веома захтевно, али се негде мора почети, а преовладало је мишљење да су ученици тог узраста ментално зрели за такав „подухват“. Да би се он успешно остварио морају му сви чиниоци у конципирању и остваривању наставе (креатори програма, писци уџбеничких материјала, наставници) прићи са дужном пажњом и суштинским познавањем.

Пажљиво читање дидактичко-методичког упутства уз кориговани наставни програм предмета Математика у седмом разреду ОШ увериће нас да су креатори тог програма предложили суштинску промену у обради садржаја из наставне теме Реални бројеви. Обрада се мора ослонити на геометријску интуицију; она треба као основну истину коју не доказујемо (аксиому) да прихвати чињеницу да свака дуж, самим својим постојањем, има дужину која се, за изабрану јединицу мере за дужину, изражава бројем – мерним бројем њене дужине. Сваку дуж AB можемо преместити на бројевну праву тако да се њен крај A поклопи с почетком O а крај B се нађе на позитивном делу бројевне осе. Дуж AB има дужину и за изабрану јединицу мере на бројевној оси има свој мерни број. Тај број је координата тачке B. Јасно је да не морамо премештати дуж AB на осу. За сваку тачку B позитивног дела бројевне осе, дуж OB има своју дужину и, за изабрану јединицу мере за дужину на оси, има свој мерни број; то је координата тачке B. На тај начин свакој тачки позитивног дела бројевне осе можемо придружити одређени број. Тачки O можемо доделити број 0. Тако је свакој тачки полуправе Ox додељен број. Јесу ли за то довољни разломци и број 0? На тој полуправој налази се тачка T, таква да је дужина дужи OT једнака дужини дијагонале квадрата чије су дужине страница једнаке 1. Кад би за то били довољни разломци, њој би био додељен разломак чији је квадрат једнак 2. А ако такав разломак не постоји? Онда би се на полуправој Ox нашла шупљина, тачка којој није додељен број.

Уверени да је предложени приступ оправдан и да се он може остварити у просечном одељењу, настојали смо да у уџбеничким материјалима понудимо ученицима и наставницима наш предлог за његово остваривање и превазилажење тешкоћа у вези са поменутом шупљином на бројевној полуправој. Он подразумева једноставне кораке чији редослед треба поштовати, при чему је први од њих већ поменути договор (аксиома) (за нас аксиома која замењује аксиому о супремуму или о уметнутим интервалима или о Дедекиндовим пресецима или ...). Ти кораци су:

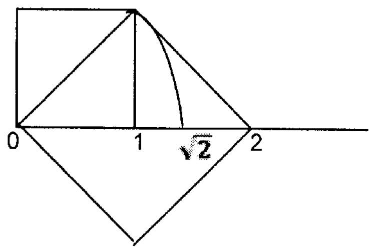
1° При изабраној јединици мере за дужину, дужина сваке дужи се изражава бројем, мерним бројем дужине те дужи;

2° Постоји број чији је квадрат једнак 2. Такав је мерни број дужине странице квадрата чији је мерни број површине, при одговарајућој јединици мере за површину, једнак 2;

3° Не постоји рационалан број чији је квадрат једнак 2;

4° Постоји број који није рационалан; такав је број чији је квадрат једнак 2. Он је ирационалан. Означавамо га са $\sqrt{2}$.

Први корак смо већ коментарисали. Он не захтева нашу активност на овоме месту. Други корак ослања се на слику на којој уочавамо да је мерни број површине већег квадрата једнак 2 ако је за јединицу мере за површину изабрана површина мањег квадрата (квадрата чији је мерни број дужине странице једнак 1). Дужина странице већег квадрата једнака је дужини дијагонале мањег квадрата.



Трећи корак је стандардни доказ (по Аристотеловом моделу свођења на противречност) да квадрат разломка не може бити једнак 2.

Напомена. Иако је дељивост у скупу $\mathbf{N}$ обрађена у петом разреду, није на одмет прво доказати да је квадрат парног броја паран број и да је квадрат непарног броја непаран број, одакле следи: ако је квадрат природног броја паран, онда је тај број паран. Касније ће нам, за исправан доказ чињенице да, на пример, не постоји разломак чији је квадрат једнак броју 3, требати и слично разлагање скупа природних бројева у класе бројева који: 1° при дељењу са 3 дају остатак 0, облика су $3k$, $k \in \mathbf{N}$, (дељиви су са 3); 2° при дељењу са 3 дају остатак 1, облика су $3k+1$, $k \in \mathbf{N}_0$; 3° при дељењу са 3 дају остатак 2, облика су $3k+2$, $k \in \mathbf{N}_0$, и да су квадрати бројева из прве класе дељиви са 3 а да квадрати бројева из друге и треће класе при дељењу са 3 дају остатак 1. Одатле следи: ако је квадрат природног броја дељив са 3, тај је број дељив са 3. Слично се може поступити за доказивање чињенице да не постоји разломак чији је квадрат једнак било којем простом броју.

Из 2° и 3° следи 4°. Број $\sqrt{2}$ није рационалан; он је, дакле „нерационалан“, односно ирационалан и има своје место на бројевној полуправој.

Даља изградња структуре реалних бројева остварује се стандардним поступцима попуњавања бројевне праве реалних бројева, увођењем операција и релација, налажења децималних записа реалних бројева, употпуњеног теоремом да су такви записи ирационалних бројева бесконачни и непериодични. Наша настојања да ученике уверимо у то да постоји бесконачно много ирационалних бројева морају бити подржана бар једним примером. Због тога морамо доказати теорему (у одељењу је не називамо тако):

Теорема 6. *Нека је a ирационалан број и r било који рационалан број. Онда је $a + r$ ирационалан број.*

У оквиру додатне наставе може се доказати теорема

Теорема 7. *Нека је a произвољан ирационалан број и r произвољан ра-*

ционалан број. Тада су: 1° a; 2° $1/a$; 3° $a+r$; 4° $a-r$; 5° $r-a$; 6° $a\cdot r$, $r\neq 0$; 7° $\dfrac{r}{a}$; 8° $\dfrac{a}{r}$, $r\neq 0$, *ирационални бројеви.*

Следећи пример можемо искористити да осветлимо помало необично понашање скупа **I** ирационалних бројева у односу на основне операције које смо у њему дефинисали.

Пример. Наћи ирационалне бројеве a и b, такве да је: 1° $a+b$ ирационалан број; 2° $a+b$ рационалан број; 3° $a\cdot b$ ирационалан број; 4° $a\cdot b$ рационалан број; 5° $\dfrac{a}{b}$ ирационалан број; 6° $\dfrac{a}{b}$ рационалан број.

Дозволићемо себи на крају, само за нашу употребу, да подсетимо на важну чињеницу, којом се можемо користити приликом евентуалног креирања задатака у вези с овом проблематиком, садржану у следећој теореми

Теорема 8. *Нека су n и a природни бројеви. Реалан број $\sqrt[n]{a}$ је или природан број или ирационалан број.*

Због тога су бројеви $\sqrt{15}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{18}$, $\dots$ ирационални.

Завршна напомена. Сведоци смо да се у наставној пракси, као резултат инерције образовног система или као последица предлога кроз неке уџбеничке материјале, садржаји у вези са увођењем ирационалних бројева, па тиме и структуре реалних бројева, понекад обрађују и тако што се

- постојање ирационалних бројева утемељи на некој од аксиома (супремума, о уметнутим интервалима, о Дедекиндовим пресецима, $\dots$), што је, наравно, исправно, али се веома тешко може успешно остварити и није примерено потребама наставе математике у ОШ, а уз то представља суштинско непоштовање важећег Наставног програма;
- без икаквог утемељења прихвати да је $\sqrt{2}$ број, па се, без образложења зашто се то може чинити, доказује да тај број није рационалан, оперишући при томе с тим бројем по правилима која важе за операције с рационалним бројевима, што морамо окарактерисати као поједностављивање које није допустиво ни у условима извесне слободе коју имамо приликом дидактичке трансформације математичких садржаја у ОШ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Програм математике за пети, шести и седми разред основне школе, „Просветни преглед“ 2007, 2008, 2009.

E-mail: `vladimic@EUnet.rs`