Синиша Гавриловић

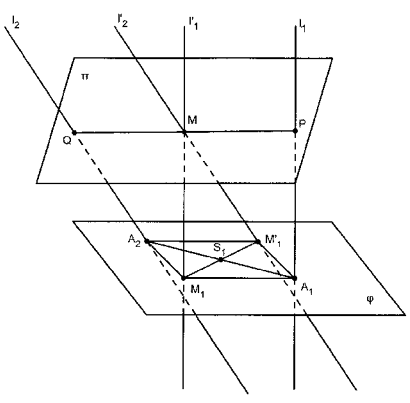
ГЕОМЕТРИЈСКА МЕСТА ТАЧАКА У ПРОСТОРУ

По И. Ф. Шаригину, геометрија је моћно средство у развитку личности у најширем погледу. Она развија особине личности (стваралачки развој, морално васпитање, независност у мишљењу, судовима, понашању). Геометрија као предмет нуди много разноврсних садржаја о којима појединци могу критички размишљати и о којима могу доносити закључке ослобођени утицаја сопствених осећања. Самим тим настава геометрије изнедрава и свој најзначајнији циљ – развијање самосталног, јасног и брижљивог логичког мишљења ученика, који је уједно и најбитнији циљ наставе математике.

Конструктивни задатак у равни се решава помоћу лењира и шестара. У принципу, геометријске конструкције у простору ефективно не изводимо, већ анализирамо и описујемо. У овом раду обрадићемо групу задатака везаних за одређивање геометријских места тачака (ГМТ) у простору.

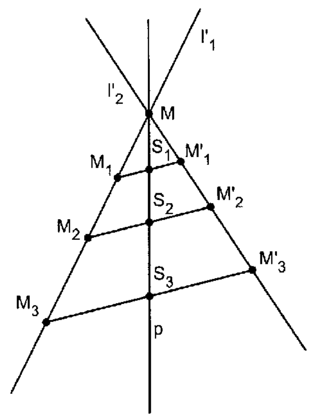
Задатак 1. *Одредити ГМ средишта дужи, паралелних датој равни и чији крајеви леже на двема датим мимоилазним правим.*

Решење. Нека дате праве l_1 и l_2 секу дату раван π у тачкама P и Q (ако $l_1 \parallel \pi$ или $l_2 \parallel \pi$, онда нема тражених дужи). Повуцимо кроз средиште M дужи PQ праве l_1' и l_2', паралелне правим l_1 и l_2, респективно (сл. 1). Уочимо раван φ паралелну равни π, и нека она сече праве l_1 и l_2 у тачкама A_1 и A_2, а праве l_1' и l_2' у тачкама M_1 и M_1'. Како су четвороуглови M_1A_1PM и $M_1'A_2QM$ парелелограми, следи да је четвороугао $M_1A_1M_1'A_2$ паралелограм. Према томе, средиште дужи A_1A_2 поклапа се са средиштем дужи M_1M_1', тако да се решење проблема за дате мимоилазне праве l_1 и l_2 поклапа са решењем истог проблема за праве l_1' и l_2' које се секу.



Сл. 1

Нека је S_1 средиште дужи M_1M_1', S_2 средиште дужи M_2M_2', S_3 средиште дужи M_3M_3', … , где су тачке M_i, M_i' ($i \in \mathbf{N}$) тачке пресека равни, паралелних равни π, са правим l_1' и l_2'. Нека је права p одређена тачкама M и S_1 (сл. 2). Из особина сличности троуглова следи да тачке S_2, S_3, S_4, ... припадају правој p која представља тражено геометријско место тачака. Обратно, лако се види да свака тачка праве p представља средиште дужи која је паралелна датој равни а чији крајеви леже на двема датим мимоилазним правим. ■



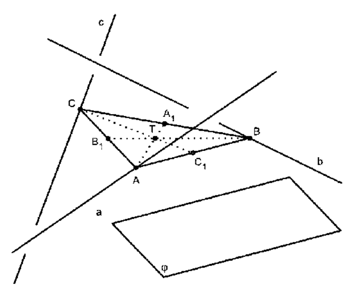
Сл. 2

Задатак 2. *Одредити ГМ тачака које у датом односу $x : y$ деле дужи, паралелне датој равни и чији крајеви леже на двема датим мимоилазним правим.*

Решење. Нека дате праве l_1 и l_2 секу дату раван π у тачкама P и Q (ако $l_1 \parallel \pi$ или $l_2 \parallel \pi$, онда нема тражених дужи). Повуцимо кроз тачку M, која дели дуж PQ у односу $x : y$, праве l_1' и l_2' паралелне правим l_1 и l_2, респективно. Уочимо раван паралелну равни π, и нека она сече праве l_1 и l_2 у тачкама A_1 и A_2, а праве l_1' и l_2' у тачкама M_1 и M_1'. Како су четвороуглови M_1A_1PM и $M_1'A_2QM$ паралелограми, следи да је четвороугао $M_1A_1M_1'A_2$ трапез, при чему је $M_1A_1 : M_1'A_2 = x : y$. Нека је тачка S_1 пресек дијагонала посматраног трапеза. Како су троуглови $M_1A_1S_1$ и $M_1'A_2S_1$ слични, онда је $S_1A_1 : S_2A_2 = x : y = M_1S_1 : M_1'S_1$. На тај начин смо решавање проблема за дате мимоилазне праве l_1 и l_2 свели на решавање истог проблема за праве l_1' и l_2' које се секу. Тражено геометријско место тачака је права одређена тачкама M и S_1. ■

Задатак 3. *Дате су три праве од којих су сваке две мимоилазне. Одредити ГМ тежишта троуглова, паралелних датој равни и чија темена припадају датим правим.*

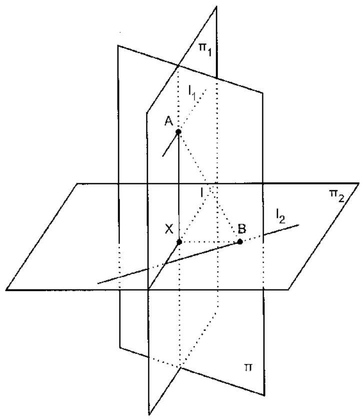
Решење. ГМ средишта страница AB посматраних троуглова је права l (видети задатак 1). Тражено ГМТ чине тачке које деле дужи у односу $1 : 2$, које су паралелне датој равни и чији крајеви припадају правој l и трећој датој правој (сл. 3). На основу задатка 2 је тражено ГМТ такође права. ■



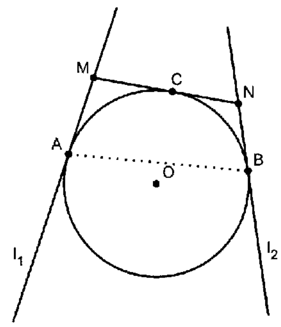
Сл. 3

Задатак 4. *У простору су дате две мимоилазне праве и тачка A на једној од њих. Кроз дате праве постављене су две нормалне равни, образујући прав диедар. Одредити ГМ пројекција тачке A на стране таквих диедара.*

Решење. Нека су π_1 и π_2 нормалне равни које садрже праве l_1 и l_2. Нека је l права њиховог пресека, X пројекција тачке A на праву l која припада правој l_1. Поставимо кроз тачку A раван π нормалну на праву l_2 (сл. 4). Како је $\pi \perp l_2$, то је $\pi \perp \pi_2$. Зато права AX припада равни π. Дакле, ако је B тачка пресека равни π и праве l_2, онда је $\angle BXA = 90°$, тј. тачка X припада кружници пречника AB конструисаној у равни π . ■



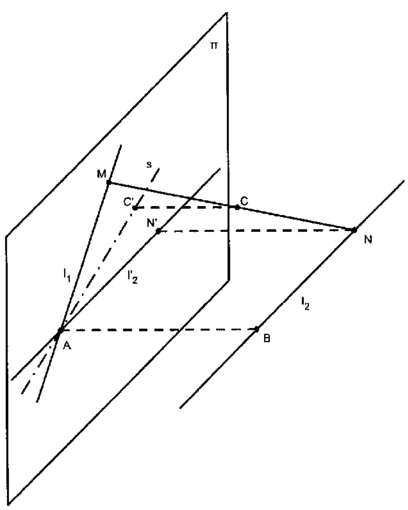
Сл. 4



Сл. 5

Задатак 5. *Праве l_1 и l_2 додирују сферу. Дуж MN чији крајеви припадају тим правим додирује сферу у тачки C (сл. 5). Одредити ГМТ тачака C.*

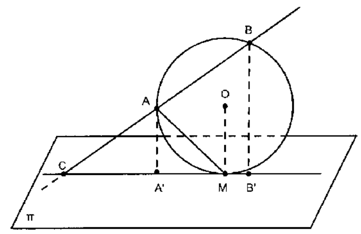
Решење. Нека права l_1, која садржи тачку M, додирује сферу у тачки A, а права l_2 у тачки B. Поставимо кроз праву l_1 раван паралелну са l_2, и посматрајмо пројекцију на ту раван у правцу праве AB (сл. 6). Нека су N' и C' слике тачака N и C при тој пројекцији. Како је $AM = AC$ и $BN = NC$, онда је $AM : AN' = AM : BN = CM : CN$, а на основу Талесове теореме је $CM : CN = C'M : C'N'$, па је $AM : AN' = C'M : C'N'$, тј. AC' је симетрала $\angle MAN'$. Одатле следи да раван $ABCC'$ образује једнаке углове са правим MA и AN', тј. l_1 и l_2 (иначе, таквих равни има две). Тражено ГМТ су две кружнице по којима те равни секу дату сферу; тачке A и B при томе треба искључити у случају када се праве l_1 и l_2 не секу. ■



Сл. 6

Задатак 6. *Тачке A и B леже са исте стране равни π, при чему права AB није паралелна са равни π. Одредити ГМТ центара сфера које садрже дате тачке и додирују дату раван.*

Решење. Нека је C тачка пресека праве AB са датом равни, и нека је тачка M тачка додира једне од тражених сфера са равни π (сл. 7). Како је $CM^2 = CA \cdot CB$, то тачка M припада кружници полупречника $\sqrt{CA \cdot CB}$ са центром у тачки C. Следи да центар O сфере припада омотачу правог ваљка чија је основа та кружница. Осим тога, центар сфере припада равни која пролази кроз средиште дужи AB и која је на њу нормална.

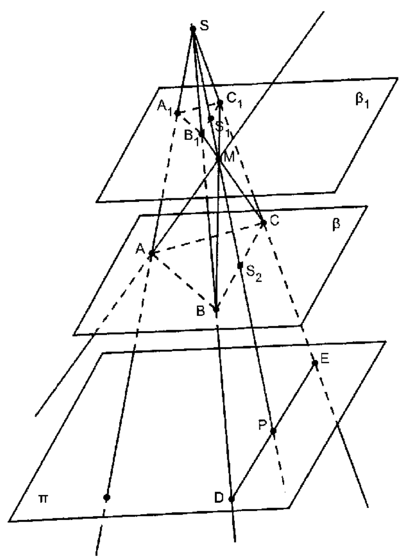


Сл. 7

Посматрајмо сада тачку O омотача ваљка која је једнако удаљена од тачака A и B. Тада је растојање од тачке C до пројекције M тачке O на раван π једнако $\sqrt{CA \cdot CB}$. Нека је CM_1 тангента сфере полупречника OA са центром у тачки O, па је $CM_1^2 = CA \cdot CB$. Тада је $CM = CM_1$, па је $OM^2 = CO^2 - CM^2 = CO^2 - CM_1^2 = OM_1^2$, тј. тачка M припада посматраној сфери. Како је $OM \perp \pi$, онда је M тачка додира те сфере и равни π. Дакле, тражено ГМТ је пресек омотача ваљка и равни. ∎

Задатак 7. *Две равни паралелне датој равни π секу ивице триедра у тачкама A, B, C и A_1, B_1, C_1 (тачке означене истим словом припадају истој ивици). Одредити ГМТ пресека равни ABC_1, AB_1C и A_1BC.*

Решење. Пресек равни ABC_1 и AB_1C је права AM, где је M тачка пресека дијагонала BC_1 и B_1C трапеза BCC_1B_1 (сл. 8). Нека су S_1 и S_2 средишта дужи, редом, B_1C_1 и BC. Хомотетијом са центром у тачки S дуж B_1C_1 се пресликава у дуж BC, па су тачке S, S_1, S_2 колинеарне. Докажимо да тачка M припада правој $p(S, S_1, S_2)$. Нека је M' тачка пресека правих $p(B, C_1)$ и $p(S_1, S_2)$, и B_1' тачка пресека правих $p(M', C)$ и $p(B_1, C_1)$. С обзиром да важи сличност троуглова: $\triangle S_1C_1M' \sim \triangle S_2BM'$ и $\triangle S_1B_1'M' \sim \triangle S_2CM'$, следи да је $S_1C_1 : S_2B = S_1M' : M'S_2$ и $B_1'S_1 : CS_2 = S_1M' : M'S_2$. Одатле је $S_1C_1 : S_2B = B_1'S_1 : CS_2$, а како је $S_2B = CS_2$, закључујемо да је $S_1C_1 = B_1'S_1$, па је $B_1 \equiv B_1'$, што значи да се тачке M и M' поклапају. Дакле, тачка M припада правој $l = p(S, S_1, S_2)$.

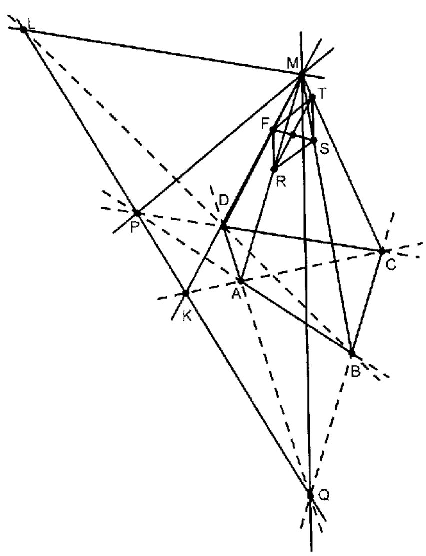


Сл. 8

Права l је једнозначно одређена са равни π, јер права l пролази кроз средишта свих дужи паралелних равни π, а чији се крајеви налазе на ивицама S_B и S_C триедра, па можемо посматрати баш дуж DE у равни π чији се крајеви налазе на ивицама S_B и S_C триедра, потом наћи њено средиште P, спојити са тачком S и на тај начин конструисати праву l. Одатле следи да је и раван π_a једнозначно одређена, јер садржи праву l и ивицу S_A триедра. Тачка пресека праве AM и равни A_1BC припада равни π_a, јер тој равни припада цела права AM. Аналогно равни π_a конструишемо раван π_b. Нека је m права пресека тих равни (раван π_c такође садржи праву m). Тражено ГМТ су тачке те праве које припадају унутрашњости датог триедра. ■

Задатак 8. *Дат је раван четвороугао $ABCD$. Одредити ГМ таквих тачака M да се омотач пирамиде $MABCD$ може пресећи са равни тако да се у пресеку добије: а) правоугаоник; б) ромб.*

Решење. Нека су P и Q тачке пресека, редом, продужетака наспрамних страница CD и AB, AD и BC четвороугла $ABCD$. Тада су MP и MQ праве пресека равни наспрамних страна пирамиде $MABCD$ (сл. 9). Претпоставимо да су тачке R, S, T, F, редом, на правим MA, MB, MC, MD такве да је четвороугао $RSTF$ паралелограм. Покажимо да је права MQ паралелна равни $RSTF$. Претпоставимо супротно, и нека је H тачка пресека праве MQ и равни $RSTF$. Како је права ST пресек равни MCQ и $RSTF$, а тачка H припада обема равнима, следи да права ST садржи тачку H. Аналогно се показује да права RF садржи тачку H. Дакле, праве RF и ST се секу у тачки H, што је контрадикција са претпоставком да је четвороугао $RSTF$ паралелограм. Одатле следи да је права MQ паралелна равни $RSTF$. Аналогно се показује да је права MP паралелна равни $RSTF$. Зато је пресек пирамиде $MABCD$ паралелограм сако ако је раван пресека паралелна са равни MPQ, и при томе су странице паралелограма паралелне са MP и MQ.



Сл. 9

а) У пресеку можемо добити правоугаоник само ако је $\angle PMQ = 90°$, тј. тачка M припада сфери пречника PQ. Тачке те сфере које припадају равни датог четвороугла треба искључити.

б) Нека су K и L тачке пресека продужетака дијагонала AC и BD са правом PQ. Пошто су дијагонале паралелограма, који се добија у пресеку пирамиде $MABCD$, паралелне правим MK и ML, онда је пресек ромб само ако је $\angle KML = 90°$, тј. тачка M припада сфери пречника KL. Тачке те сфере које припадају равни датог четвороугла треба искључити. ■

Задаци за вежбу

Задатак 1. Одредити ГМ средишта дужи дате дужине d, чији крајеви леже на двема датим мимоилазним правим.

Задатак 2. Дате су три праве l_1, l_2 и l_3, од којих су сваке две мимоилазне. Праве l_1, l_2 и l_3 су нормалне на једну праву и секу је редом у тачкама A_1, A_2 и A_3. Нека су M и N тачке правих l_1 и l_2 такве да се праве l_3 и MN секу. Одредити ГМ средишта дужи MN.

Задатак 3. Одредити ГМТ чији је збир растојања до равни које садрже стране датог триедра константан.

Задатак 4. У равни је дат оштгроугли троугао ABC. Одредити ГМ пројекција на ту раван свих тачака M за које су троуглови ABM, BCM и CAM оштроугли.

Како не постоје универзални обрасци или прецизна упутства, чијом би применом једноставно и сигурно ученик у било ком задатку открио решење, он мора да врши одређена истраживања и проверавања, како би открио прави пут ка решењу проблема. На том путу он се служи мисаоним поступцима и методама које усмеравају трагање и омогућавају да брже пронађе решење задатог геометријског или неког другог математичког проблема.

Закључујемо да би требало ученике упознати са геометријским проблемима у простору јер се тако подстичу на размишљање и проналазе разне приступе у решавању једног те истог проблема. Решавањем тих задатака, код ученика се буди интересовање и покреће досетљивост продукујући доживљаје напетости самоангажовања. Овакви доживљаји могу створити склоност за умни рад, остављајући неизбрисив траг на дух и карактер младог човека.

Захваљујем се др Ратку Тошићу који ми је несебично помогао приликом избора теме и реализације овог рада.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Просолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии*, «Наука», Москва, 1989.
2. R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford Univ. Press, 1996.
3. R. Tošić, V. Petrović, *Zbirka zadataka iz osnova geometrije*, PMF Novi Sad, 1990.
4. Стручно-методички часопис *Математика*, Завод за уџбенике и наставна средства Србије, Београд, 1973.
5. М. Божић, *Преглед историје и филозофије математике*, Београд, 2002.
6. Ђ. Г. Марковић, *Геометријски полиформизам*, Подгорица, 2006.

ОШ „Јанко Веселиновић“, Шабац
E-mail: ssggavra@ptt.rs