Др Божидар Јовановић

ШТА СУ ТО ПОТПУНО ИНТЕГРАБИЛНИ ХАМИЛТОНОВИ СИСТЕМИ?

1. Увод

Решавање конкретних механичких и астрономских проблема је био један од основних задатака математике до почетка XX века. Њиме су се између осталих бавили Ојлер, Ларганж, Хамилтон, Абел, Јакоби, Ковањевска, Чаплигин, Поенкаре. Већина проблема није решива. Зато је проналажење решивих система и њихова анализа од изузетног значаја.

Почевши од друге половине XX века долази до великог продора у истраживању и дају се основе савремене теорије интеграбилних система. Многи велики математичари попут Лакса, Новикова, Арнољда, Мозера, Мамфорда, Дубровина, Козлова, дали су свој допринос развоју теорије, која у себи повезује лепоту класичне механике и диференцијалних једначина са алгебарском, симплектичком и диференцијалном геометријом, теоријом Лијевих група и алгебри.

Циљ овог чланка је да се читаоци упознају са основним појмовима теорије интеграбилних система. Многи механички и физички системи се моделују *Хамилтоновим једначинама.* Увођење једначина мотивисаћемо једним од најједноставнијих проблема – *хармонијским осцилатором* и системом n независних хармонијских осцилатора (секција 2). Једначине Хармонијског осцилатора, као линеарне, лако се решавају и решења система се изражавају као тригонометријске функције времена (секција 3). Динамика се линеаризује на инваријантним површима које представљају производ кружница (*торусима*).

Показује се да и много сложенији Хамилтонови проблеми, уколико имају довољан број интеграла кретања, који се у физици називају и закони одржања, имају слично квалитативно понашање. То је садржај *Лиувил-Арнољдове теореме* коју без доказа наводимо у секцији 5. У секцији 4 дефинисана је *Пуасонова заграда.* То је веома важна геометријска структура која омогућава да се у проучавању Хамилтонових система користе аналитичке, алгебарске и геометријске методе.

Рад је написан у оквиру пројекта 144014 Геометрија и топологија, многострукости и интеграбилни динамички системи, Министарсва за науку Србије. Захваљујем се Бориславу Гајићу, Вишњи Јовановић, Ђорђу Баралићу и Драгану Благојевићу на корисним примедбама.

Аутор је добитник награде на 12. Српском математичком конгресу, Нови Сад 2008, као најбољи млади математичар (до 40 година).

2. Хамилтонове једначине

2.1. Још у средњој школи смо научили да се кретање материјалне тачке масе m под утицајем силе облика $-aq$, $a > 0$, где је q отклон од равнотежног положаја $q = 0$ (на пример, кретање материјалне тачке везане за еластичну опругу коефицијента еластичности a, или *мале осцилације* математичког клатна јединичне дужине, где је q отклон од равнотежог положаја, m маса материјалне тачке и $a = mg$ сила Земљине теже) описује једначинама:

$$m\ddot{q} = -aq. \tag{1}$$

Увођењем променљиве $p = m\dot{q}$ (импулса) и функције $h(q,p) = \dfrac{1}{2m}p^2 + \dfrac{a}{2}q^2$ (збир кинетичке и потенцијалне енергије система) једначина другог реда (1) добија облик система једначина првог реда у простору $\mathbf{R}^2(q,p)$:

$$\dot{q} = \frac{p}{m} = \frac{\partial h}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -aq = -\frac{\partial h}{\partial q}. \tag{2}$$

Сл. 1. Систем n независних еластичних опруга.

Посматрајмо сада систем од n независних хармонијских осцилатора (на пример систем од n еластичних опруга). Као и малопре, у простору $\mathbf{R}^{2n}(q,p) = \mathbf{R}^{2n}(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ једначине кретања можемо написати у облику:

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i} = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -a_i q_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i}, \qquad i = 1,\dots,n \tag{3}$$

($a_i > 0$), где функција $h(q,p) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2m_i}p_i^2 + \dfrac{a_i}{2}q_i^2 \right)$ представља укупну енергију механичког система.

2.2. Систем једначина

$$\dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i}, \qquad i = 1,\dots,n \tag{4}$$

дефинисаних у некој области U простора $\mathbf{R}^{2n}(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ називају се *Хамилтоновим једначинама*, функција h се назива *Хамилтонијан*, док се област U назива *фазни простор* система. Увођењен променљиве $x = (q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ и *Хамилтоновог векторског поља*

$$X_h = \left(\frac{\partial h}{\partial p_1},\dots,\frac{\partial h}{\partial p_n},-\frac{\partial h}{\partial q_1},\dots,-\frac{\partial h}{\partial q_n} \right), \tag{5}$$

једначине (4) записујемо $\dot{x} = X_h(x)$.

2.3. Подсетимо се неких основних појмова из теорије обичних диференцијалних једначина. Нека су у области $U \subset \mathbf{R}^d$ задате једначина

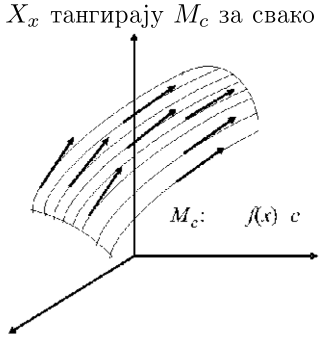
$$\dot{x} = X(x). \tag{6}$$

Овде је $x = (x_1, \dots, x_d)$ тачка из U а $X = (X_1(x), \dots, X_d(x))$ глатко векторско поље на U. По теореми о егзистенцији и јединствености решења, кроз сваку тачку x^0 из M пролази јединствено решење $x(t)$, такво да је $x(t_0) = x^0$. Под *интеграбилношћу* једначина, у најширем контексту подразумева се могућност проналажења и само проналажење решења једначина $x(t)$ за општи почетни услов $x(t_0) = x^0$.

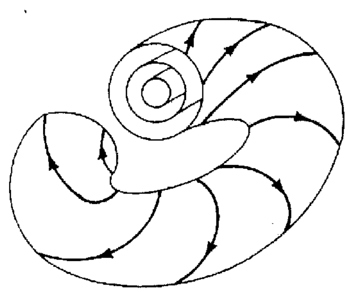
У решавању једначина важну улогу играју интеграли кретања. Функције f је *интеграл* једначине (6) уколико је контантна дуж свих решења $x(t)$: $f(x(t)) = const$. Јасно је да је f интеграл ако и само ако је извод функције f у правцу векторског поља X идентички једнак нули:

$$X(f) = \sum_{i=1}^{d} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0.$$

Геометријски, то значи да уколико у једном тренутку времена трајекторија $x(t)$ припада скупу $M_c : f(x) = c$, да тада она и лежи унутар M_c. Уколико је диференцијал интеграла df различит од нуле на M_c, тада је M_c глатка површ. Вектори X_x тангирају M_c за свако $x \in M_c$.



Сл. 2. Инваријантна површ



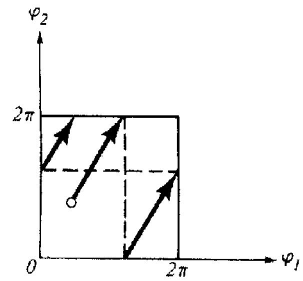
Сл. 3. Раслојавање фазног простора на инваријантне торусе

Уколико једначине (6) имају l функционално независних интеграла кретања, проблем се редукује на решавање суженог система на (за опште вредности параметара $c = (c_1, \dots, c_l)$) инваријантној $(d-l)$-димензионој глаткој површи $M_c : f_1(x) = c_1, \dots, f_r(x) = c_l$. Јасно је да постојање $d-1$ интеграла повлачи решавање општег система (6).

Као што ћемо ускоро видети, у оквиру теорије Хамилтонових система за решавање једначина (4) потребно је „само“ n интеграла кретања. Штавише, фазни простор потпуно интеграбилног Хамилтоновог система има веома фину структуру: он је, скоро свуда, раслојен на инваријантне n-димензионе торусе на којима се динамика линеаризује.

Сетимо се да је n-димензиони *торус* $\mathbf{T}^n$ директни производ n кружница: $\mathbf{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$. Нека су $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ координате векторског простора $\mathbf{R}^n$.

Тада имамо природно пресликавање $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{T}^n$, $\pi(\varphi) = \varphi \pmod{2\pi}$, где је је $\varphi_i \pmod{2\pi}$ угловна координата на i-тој кружници. Пресликавање π је *на* и 2π периодично по свакој координати. Тако торус можемо замислити и као n-димензиону коцку $[0, 2\pi]^n \subset \mathbf{R}^n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ на којој су тачке са координатама $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, 0, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n)$ и $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, 1, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n)$, $i = 1, \ldots, n$, тј. наспрамне стране коцке, идентификоване.



Сл. 4. Условно-периодично кретање

Линеарно кретање на торусу је пројекција праве пресликавањем π:

$$\varphi(t) = \varphi^0 + \omega t \iff \varphi_i(t) = \varphi_i^0 + \omega_i t, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Такво кретање се назива и *условно-периодичним* или *квази-периодичним*. Бројеви $\omega_1, \ldots, \omega_n$ се називају *фреквенције*.

2.4. Потпуно интеграбилни Хамилтонови системи су веома ретки. Можемо слободно рећи да уколико изаберемо случајан Хамилтонијан да ће одговарајуће Хамилтонове једначине бити неинтеграбилне. Ипак, по Колмогоров-Арнољд-Мозеровој (КАМ) теореми уколико имамо потпуно интеграбилни систем са Хамилтонијаном $h_0(x)$ и извршимо пертурбацију $h(x) = h_0(x) + \epsilon h_1(x)$, тада ће и Хамилтонов систем са Хамилтонијаном $h(x)$ задржати одређене особине потпуно интеграбилног система (уз одређене допунске услове на фреквенције кретања и за довољно мале вредности параметра ϵ). Наиме одређен број торуса „преживљава“ пертурбацију [Ар].

На пример, посматрајмо наш Сунчев систем и замислимо да се састоји само од Сунца које је непокретно и осам планета. Уколико занемаримо међусобно дејство планета, из гравитационог привлачења Сунца и сваке планете појединачно, Кеплерови закони нам дају да ће се кретање планета, уколико је ограничено, одвијати по елипсама чија је једна од жижа Сунце. То је поптпуно интеграбилан систем и имамо раслојавње фазног простора на торусе димензије 8. У реалности, и планете се међусобно привлаче, што одговара пертурбацији система. Добијамо систем једначина који је неинтеграбилан. Можемо апроксимирати кретање планета елипсама, али дугорочно не можемо предвидити динамику, чак и толико упрошћеног модела Сунчевог система.

3. Решавање хармонијског осцилатора

3.1. Једначина (2) се једноставно решава. Лако се проверава да је енергија h интеграл кретања:

$$\frac{d}{dt}h(q,p) = \frac{1}{2m}2p\dot{p} + \frac{a}{2}2q\dot{q} = \frac{1}{m}apq - \frac{1}{m}apq = 0.$$

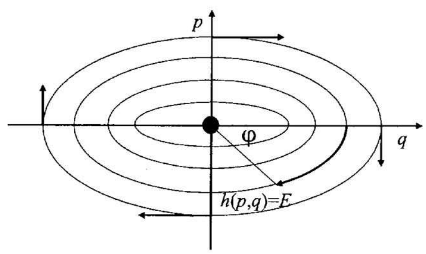
Приметимо да једначина $h(q,p)=E$, за $E>0$ задаје елипсу $\mathcal{E}_E$ у $\mathbf{R}^2(q,p)$. На елипси $\mathcal{E}_E$ уведимо угловну координату φ (mod 2π) формулама

$$q=\sqrt{2E/a}\cos(\varphi), \quad p=-\sqrt{2Em}\sin(\varphi). \tag{8}$$

Из једначина кретања (2) добијамо $\dot\varphi=\sqrt{a/m}$. Одатле, интеграцијом изводимо добро познате изразе

$$q(t)=\sqrt{2E/a}\cos\left(\sqrt{a/m}t+\varphi^0\right), \quad p(t)=-\sqrt{2Em}\sin\left(\sqrt{a/m}t+\varphi^0\right).$$

Константе $E>0$ и $\varphi^0\in[0,2\pi)$ одређујемо из почетних услова $(q(t_0),p(t_0))$. Почетни услов $(q(t_0),p(t_0))=(0,0)$ задаје *равнотежни положај система*, наиме тада је решење једноставно $(q(t),p(t))\equiv(0,0)$.



Сл. 5. Фазни простор хармонијског осцилатора.

3.2. Систем (3) има n независних интеграла кретања

$$f_i(q,p)=f_i(q_i,p_i)=\frac{1}{2m_i}p_i^2+\frac{a_i}{2}q_i^2, \qquad i=1,\dots,n \tag{9}$$

(енергија i-тог хармонијског осцилатора) и фазни простор је раслојен на инваријантне површи

$$T_E=\{(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)\in\mathbf{R}^{2n}\mid f_1=E_1,\dots,f_n=E_n\}. \tag{10}$$

У општем случају, уколико су све константе E_i веће од нуле тада је T_E једнак производу елипси: $T_E=\mathcal{E}_{E_1}\times\cdots\times\mathcal{E}_{E_n}$, $\mathcal{E}_{E_i}=\{(q_i,p_i)\,|\,f_i=E_i\}$ и представља n-димензиони торус $\mathbf{T}^n$. Ако је нека од константи E_i једнака нули кретање се одвија по торусима мање димензије.

Уведимо угловне координате $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ на T_E формулама

$$q_i=\sqrt{2E_i/a_i}\cos(\varphi_i), \quad p_i=-\sqrt{2E_im_i}\sin(\varphi_i), \quad i=1,\dots,n.$$

Једначине (3) се у угловним координатама линеаризују

$$\dot\varphi_i=\omega_i=\sqrt{a_i/m_i}, \qquad i=1,\dots,n. \tag{11}$$

Опште решење можемо изразити у облику:

$$q_i(t)=\sqrt{2E_i/a_i}\cos\left(\omega_it+\varphi_i^0\right),\ p_i(t)=-\sqrt{2E_im_i}\sin\left(\omega_it+\varphi_i^0\right),\ i=1,\dots,n, \tag{12}$$

где из почетних услова одређујемо константе $E_i \geq 0$ и $\varphi_i^0 \in [0, 2\pi)$. Равнотежни положај система задат је условом $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)|_{t_0} = 0$.

4. Пуасонова структура

4.1. *Канонска Пуасонова структура* (или *канонска Пуасонова заграда*) у области $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ је пресликавање $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(U) \times C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, дефинисано изразом:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \tag{13}$$

Специјално, за координатне функције q_i, p_j важе *канонске релације*:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Став 1. *Пуасонова заграда је билинеарно, кососиметрично пресликавање* (14)*, које задовољава Лајбницово правило* (15) *као и Јакобијев идентитет* (16)*:*

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}, \qquad \{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{14}$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}, \tag{15}$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad f, g, h \in C^\infty(U). \tag{16}$$

Став 2. *Извод функције f дуж Хамилтоновог векторског поља* (5) *дат је изразом (који се може користити као еквивалентна дефиниција Хамилтоновог векторског поља* (5)*): $\dot{f} = X_h(f) = \{f, h\}$.*

Наведени став нам омогућава да дамо алгебарску карактеристику интеграла кретања.

Став 3. *Функција f је интеграл система* (4) *ако и само ако комутира са h: $\{h, f\} = 0$. Специјално, сам Хамилтонијан је интеграл кретања.*

Очување Хамилтонијана h дуж решења једначине (4) у механици и физици се назива и *закон очувања енергије*.

Помоћу Јакобијевог идентитета (16) и става 3, долазимо до тврђења:

Став 4. *Уколико су функције f и g интеграли кретања Хамилтоновог система* (4)*, тада је то и њихова Пуасонова заграда $\{f, g\}$.*

Приметимо да уколико интеграли f и g комутирају, став 4 нам даје тривијални интеграл. Међутим тада имамо јак геометријски услов: функције h, f, g су константне дуж Хамилтонових векторских поља X_h, X_f и X_g. Тако векторска поља X_h, X_f и X_g тангирају инваријантне површи $h = c_1$, $f = c_2$, $g = c_3$.

Вежбање 1. Доказати тврђења формулисана у овом одељку.

4.2. Као што је и уобичајено у алгебри, имајући класу објеката са одређеном операцијом, посматрају се и пресликавања међу објектима који чувају ту операцију.

Нека су U и V области унутар $\mathbf{R}^{2n}$ са горе дефинисаном канонском Пуасоновом структуром. Дифеоморфизам $\Psi : U \to V$[1] је *Пуасонов изоморфизам*, или *канонска трансформација* уколико очувава Пуасонову заграду:

$$\{f \circ \Psi, g \circ \Psi\} = \{f, g\}, \quad f, g \in C^{\infty}(V).$$

Лако се показује да је тада и $\Psi^{-1} : V \to U$ канонска трансформација, као и да је композиција канонских трансформација, канонска трансформација.

Нека је дифеоморфизам $\Psi : U \to V$ задат функцијама $Q_i = Q_i(q,p)$, $P_i = P_i(q,p)$, $i = 1, \dots, n$. Тада је Ψ канонска трансформација ако и само ако функције Q_i, P_j задовољавају канонске релације: $\{Q_i, Q_j\} = 0$, $\{P_i, P_j\} = 0$, $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$.

Важна особина канонских трансформација је да их уколико посматрамо као промену координата, да тада Хамилтонове једначине (4) у новим координатама (Q, P) чувају свој облик и гласе

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{17}$$

где је $H(Q,P) = h(q(Q,P), p(Q,P))$. При томе функције $q_i = q_i(Q,P)$, $p_i = p_i(Q,P)$ представљају инверзну канонску трансформчцију Ψ^{-1}.

5. Потпуна интеграбилност

Једноставно се проверава да интеграли (9) система n независних хармонијских осцилатора међусобно комутирају.

Дефиниција 1. За Хамилтонов систем (4) кажемо да је *потуно интеграбилан* уколико поседује n функционално независних интеграла који међусобно комутирају.

Теорема 1. (Лиувил-Арнољд [Ар]) *Нека једначине* (4) *имају n комутативних интеграла $f_1, \dots, f_n$:*

$$\{f_i, f_j\} = 0, \qquad i, j = 1, \dots, n,$$

и нека је $P_c = \{f_1 = c_1, \dots, f_n = c_n\}$ инваријантна површ. Ако је P_c повезана, компактна, глатка површ (диференцијали функција $f_1, \dots, f_n$ су независни на P_c) тада је она дифеоморфна n-димензионом торусу $\mathbf{T}^n$. Постоји околина V од P_c дифеоморфна производу n-димензионог торуса $\mathbf{T}^n$ и отворене лопте $B^n \subset \mathbf{R}^n$ и канонска трансформација $\Psi : V \to V$,

$$\varphi_i = \varphi_i(q,p) \pmod{2\pi}, \qquad I_i = I_i(q,p), \qquad i = 1, \dots, n,$$

[1] Сетимо се да је диференцијабилно пресликавање $\Psi : U \to V$ $(U, V \subset \mathbf{R}^d)$

$$y_i = \Psi_i(x_1, \dots, x_d), \quad i = 1, \dots, d$$

дифеоморфизам уколико је бијекција и Јакобијан $\det(\partial y_i / \partial x_j)$ је различит од нуле.

таква да Хамилтонијан h, у координатама $(\varphi \pmod{2\pi}, I)$ зависи само од I. Скуп $V \cong \mathbf{T}^n \times B^n$ је раслојен на инваријантне n-димениoне торусе $I_i = const$ на којима је динамика условно-периодична. Хамилтонове једначине у координатама (φ, I) имају облик

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(I) = \frac{\partial h}{\partial I_1}, \ldots, \dot{\varphi}_n = \omega_n(I) = \frac{\partial h}{\partial I_n}, \quad \dot{I}_1 = \cdots = \dot{I}_n = 0.$$

Напомена 1. Координате (φ, I) називају се координатама *угао-дејство*. Координате дејства се могу одредити интеграцијом форме $pdq = p_1\,dq_1 + \cdots + p_n\,dq_n$ по основним циклима $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ торуса P_c, $I_i = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_i} p\,dq$ (видети [Ар]). По томе су и добиле назив координате дејства. Наиме у класичној механици је познат *принцип најмањег дејства* (у Мапертју-Ојлер-Лагранж-Јакобијевој форми): трајекторије система (4) које леже на инваријантној површи $\{h(q,p) = E\}$ су екстремале функционала дејства

$$\gamma \longmapsto \int_\gamma p_1\,dq_1 + \cdots + p_n\,dq_n$$

у класи кривих $\gamma \subset \{h(q,p) = E\} \subset \mathbf{R}^{2n}(q,p)$ које повезују потпросторе $\{q = q^0\} \cap \{h(q,p) = E\}$ и $\{q = q^1\} \cap \{h(q,p) = E\}$ [Ар].

Напоемна 2. На основу Лиувил-Арнољдове теореме видимо да проблем интеграбилности Хамилтонових једначина (4) у себи садржи два основна нетривијална задатка: пронаћи довољан број интеграла и експлицитно наћи опште решење система као функцију времена. Уколико се и докаже да је неки систем потпуно интеграбилан, само налажење решења је веома сложено.

Вратимо се хармонијском осцилатору (1). Торуси су елипсе $\mathcal{E}_E$. На основу напомене 1, применом Гринове формуле, добијамо израз за координату дејства:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{E}_E} p\,dq = \frac{1}{2\pi}\int_\Pi dp\,dq = E\sqrt{\frac{m}{a}} = h\sqrt{\frac{m}{a}} = \frac{h}{\omega},$$

где је Π област у $\mathbf{R}^2(q,p)$ ограничена елипсом $\mathcal{E}_E$.

Вежбање 2. Показати да за горе дефинисану функцију I и угао дат изразом (8), важи канонска релација $\{\varphi, I\} = 1$, тј. да су (φ, I) координате угао-дејство.

5.1. Торус са условно-периодичним кретањем (7) се назива *нерезонантним* уколико су фреквенције независне над пољем рационалних бројева, тј. уколико из услова $\omega_1 k_1 + \cdots + \omega_n k_n = 0$ следи да су сви $k_i = 0$.

На нерезонантним торусима кретање је равномерно свуда густо. Прецизније важи следећа теорема Х. Вејла (погледати [Ар]):

Теорема 2. *Нека је $f : \mathbf{T}^n \to \mathbf{R}$ Риман-интеграбилна и нека су $\omega_1, \ldots, \omega_n$ независни над рационалним бројевима. Тада за сваку тачку $\varphi^0 \in \mathbf{T}^n$ граница*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int_0^s f(\omega t + \varphi^0)\,dt$$

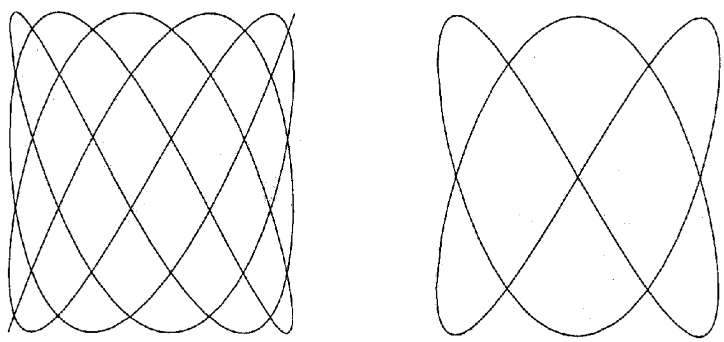
постоји и једнака је $\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi_1\,\ldots\,d\varphi_n$.

Специјално, претпоставимо да је f функција која има вредност 1 на Зхордан-мерљивој области $D\subset\mathbf{T}^n$ и 0 ван ње. Применом теореме 2, добијамо да је време које трајекторија $\omega t+\varphi^0$ проводи унутар D пропорционално мери скупа D. То говори о равномерности распореда трајекторије на торусу $\mathbf{T}^n$.

Посматрајмо торус (10), где су параметри $E_i>0$. Пројекција торуса T_E на простор $\mathbf{R}^n(q_1,\ldots,q_n)$ је квадар $K_E=\{(q_1,\ldots,q_n)\in\mathbf{R}^n\,|\,0\le q_i\le E_i,\ i=1,\ldots,n\}$. По Вејловој теореми, у случају нерезонантних фреквенција, добијамо да пројекција трајекторије (12):

$$q(t)=\Big(\sqrt{2E_1/a_1}\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1^0\right),\ldots,\sqrt{2E_n/a_n}\cos\left(\omega_n t+\varphi_n^0\right)\Big),\qquad t\in\mathbf{R}$$

свуда густо испуњава квадар K_E. У случају $n=2$, криве $(q_1(t),q_2(t))$ називају се *Лисажуове фигуре*. Када је ω_1/ω_2 рационалан број, оне чине затворене криве унутар правоугаоника K_E.



Сл. 6. Лисажуове фигуре за $\omega_2/\omega_1\notin\mathbf{Q}$, $\omega_2/\omega_1\approx 3/2$ и $\omega_2/\omega_1=3/2$.

5.2. За даље читање и детаљније упознавање са основама теорије интеграбилних система препоручујемо књигу *Математички методи механике*, једног од највећих математичара 20-тог века Владимира Арнољда [Ар]. Недавно је на српском језику издата монографија [ДМ] коју такође топло препоручујемо. Доказ линеаризације у Лиувил-Арнољдовој теореми изложићемо у чланку [Jo], предвиђеном за једну од наредних свезака Наставе математике.

ЛИТЕРАТУРА

[АР] В. И. Арнольд, *Математические методи классической механики*, Москва, Наука 1974. Превод на енглески: V.I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.

[ДМ] В. Драговић, Д. Милинковић, *Анализа на многострукостима*, Математички факултет у Београду, 2003.

[Jo] Б. Јовановић, *Линеаризација интеграбилних система*, препринт 2010.

Математички институт САНУ, Кнеза Михаила 36, 11000 Београд

E-mail: bozaj@mi.sanu.ac.rs