Драгољуб Милошевић

УОПШТЕЊЕ ЈЕДНЕ АЛГЕБАРСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

У књизи [1] дата је неједнакост за позитивне бројеве x, y, z:

$$\frac{x}{x+2y+2z}+\frac{y}{2x+y+2z}+\frac{z}{2x+2y+z}\geqslant\frac{3}{5}. \tag{1}$$

Овде ћемо дати два доказа њене генерализације

$$M\equiv\frac{x}{ax+y+z}+\frac{y}{x+ay+z}+\frac{z}{x+y+az}\geqslant\frac{3}{a+2}, \tag{2}$$

где је $0<a<1$.

Доказ 1. Ако уведемо ознаке $A=ax+y+z$, $B=x+ay+z$ и $C=x+y+az$, тада, после сабирања ових једнакости, имамо $A+B+C=(a+2)(x+y+z)$, тј. $x+y+z=\dfrac{1}{a+2}(A+B+C)$. Сада је

$$\begin{aligned} x&=\frac{1}{(1-a)(a+2)}(B+C-(a+1)A),\\ y&=\frac{1}{(1-a)(a+2)}(C+A-(a+1)B),\\ z&=\frac{1}{(1-a)(a+2)}(A+B-(a+1)C). \end{aligned} \tag{3}$$

После ове смене добијамо

$$M=\frac{1}{(1-a)(a+2)}\left(\frac{B+C}{A}+\frac{C+A}{B}+\frac{A+B}{C}-3(a+1)\right),$$

што је исто као и

$$M=\frac{1}{(1-a)(a+2)}\left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}+\frac{C}{A}+\frac{A}{C}+\frac{C}{B}+\frac{B}{C}-3a-3\right). \tag{4}$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине два позитивна броја, имамо $\dfrac{B}{A}+\dfrac{A}{B}\geqslant 2$, $\dfrac{C}{A}+\dfrac{A}{C}\geqslant 2$ и $\dfrac{C}{B}+\dfrac{B}{C}\geqslant 2$, па из (4) следи

$$M\geqslant\frac{1}{(1-a)(a+2)}(2+2+2-3-3a)=\frac{3}{a+2},$$

$0<a<1$, што је требало и доказати.

Напомена 1. Једнакост у (2) важи само ако је $x = y = z$.

Напомена 2. Неједнакост (1) еквивалентна је са

$$\frac{x}{\frac{1}{2}x+y+z}+\frac{y}{x+\frac{1}{2}y+z}+\frac{z}{x+y+\frac{1}{2}z}\geqslant\frac{6}{5},$$

што је специјалан случај неједнакости (2) за $a = \frac{1}{2}$.

Напомена 3. Аналогно се доказује да за $a > 1$ важи $M \leqslant \dfrac{3}{a+2}$. Тада користимо варијанту смене (3):

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{(a-1)(a+2)}((a+1)A-(B+C)),\\ y &= \frac{1}{(a-1)(a+2)}((a+1)B-(C+A)),\\ z &= \frac{1}{(a-1)(a+2)}((a+1)C-(A+B)). \end{aligned} \tag{3'}$$

За $a = 1$ је $M = 1$.

Доказ 2. За позитивне бројеве x, y, z и реалне бројеве a, b, c важи следећа неједнакост

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \tag{5}$$

јер је еквивалентна са

$$(a^2yz+b^2zx+c^2xy)\geqslant xyz(a+b+c)^2,$$

тј. са

$$x(bz-cy)^2+y(az-cx)^2+z(ay-bx)^2\geqslant 0,$$

што је очигледно тачно при $x, y, z > 0$. Применом неједнакости (5) добијамо

$$\begin{aligned} M=\frac{x^2}{x(ax+y+z)}+\frac{y^2}{y(x+ay+z)}+\frac{z^2}{z(x+y+az)}\geqslant\\ \geqslant\frac{(x+y+z)^2}{a(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Неједнакост

$$\frac{(x+y+z)^2}{a(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)}\geqslant\frac{3}{a+2} \tag{7}$$

еквивалентна је са

$$(a+2)(x+y+z)^2-3a(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)\geqslant 0,$$

односно са

$$2(1-a)(x^2+y^2+z^2)\geqslant 2(1-a)(xy+yz+zx),$$

тј. са

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0, \tag{8}$$

због $1-a>0$. Како је неједнакост (8) увек тачна, тачна је и неједнакост (7), па из (6) следи $M \geqslant \dfrac{3}{a+2}$ $(a<a<1)$, чиме је доказ 2 окончан.

Напомена 4. Неједнакост (2) можемо доказати и користећи конвексност функције

$$f(t)=\frac{t}{k+(a-1)t}, \qquad (k=x+y+z), \tag{9}$$

где је $0<a<1$. Функција (9) је конкавна за $a>1$, па коришћењем те чињенице можемо доказати да је $M \leqslant \dfrac{3}{a+2}$, $(a>1)$.

Напомена 5. (Редакција) Неједнакост (2) је хомогена, па се може доказати и помоћу Мјурхедове теореме (в. нпр. З. Каделбург, Д. Ђукић, М. Лукић, И. Матић: *Неједнакости*, ДМС, Београд, 2003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o, Sarajevo, 2008.

ОБАВЕШТЕЊА

УЧЕШЋЕ ПРЕДСТАВНИКА ДМС НА САСТАНЦИМА МЕЂУНАРОДНИХ АСОЦИЈАЦИЈА МАТЕМАТИЧАРА

Састанак председника друштава математичара – чланица Европског математичког друштва (EMS) одржан је у Букурешту средином априла 2010. године. Састанком је руководио *Ari Laptev*, председник EMS, а Друштво математичара Србије је представљао *Зоран Каделбург*.

Редовни годишњи састанак Математичке асоцијације Југоисточне Европе (MASSEE) одржан је у Атини крајем априла 2010. године Састанком је руководио *Doru Stefanescu*, председник MASSEE, а ДМС је представљао *Арпад Такачи*, професор ПМФ из Новог Сада.

Генерална скупштина Светске математичке уније (IMU) одржаће се у Бангалору (Индија) августа 2010. године, непосредно уочи Светског конгреса математичара у Хајдерабаду. ДМС ће представљати *Мирјана Ђорић*, професор Математичког факултета из Београда.