Др Миленко Пикула и мр Милан Живановић

ПИТАГОРИНИ ТЕТРАЕДРИ

О Питагориним тројкама природних бројева више пута је писано на страницама овог часописа. Добро су познате опште формуле помоћу којих се добијају све основне Питагорине тројке.

Такође, познато је да под Хероновом тројком подразумевамо тројку природних бројева, такву да троугао чије су то дужине страница, има такође целобројну површину. Јасно је да су Питагорини троуглови уједно и Херонови. Херонови троуглови се могу добити, на пример, спајањем или одсецањем Питагориних троуглова са истом катетом. Та катета је висина Хероновог троугла. Приметимо да постоје и Херонови троуглови без целобројних висина, видети чланак [3].

Разностраничан Херонов троугао који није правоугли називамо прави Херонов троугао. Уколико су још странице узајамно прости бројеви, кажемо да је такав Херонов троугао основни. По аналогији се дефинишу права и основна Херонова тројка.

Овде ћемо се најпре позабавити једном особином Питагориних и Херонових троуглова. Нека су дата два Питагорина троугла тројкама својих страница (a, b, c) и (a_1, b_1, c_1). Поставимо питање постоји ли такав пар Питагориних троуглова за које важи да је израз $b^2 + b_1^2$ потпун квадрат? Потврдан одговор ћемо илустровати примером.

Пример 1. Одредити све праве Херонове троуглове који су настали спајањем два Питагорина троугла дуж заједничке катете дужине 117.

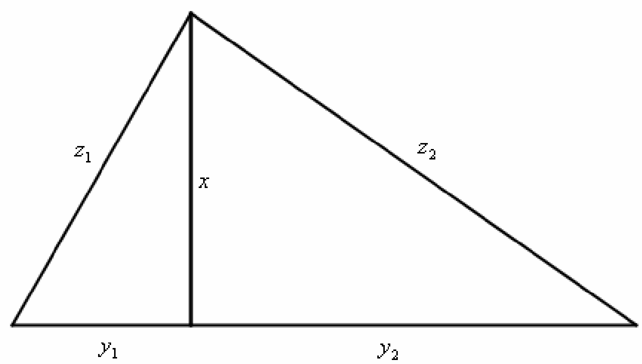
Решење. Одредићемо најпре све Питагорине троуглове са катетом 117. Том проблему одговара једначина $z^2 - y^2 = 13689$, односно $(z-y)(z+y) = 3^4 \cdot 13^2$ из које добијамо следеће системе:

$$z+y=13689 \wedge z-y=1, \quad z+y=4563 \wedge z-y=3, \quad z+y=1521 \wedge z-y=9,$$
$$z+y=1053 \wedge z-y=13, \quad z+y=507 \wedge z-y=27, \quad z+y=351 \wedge z-y=39,$$
$$z+y=169 \wedge z-y=81.$$

Решењима ових система одговара следећих 7 Питагориних тројки:

$(117, 6844, 6845)$, $(117, 2280, 2283)$, $(117, 756, 765)$,

$(117, 520, 533)$, $(117, 240, 267)$, $(117, 156, 195)$, $(117, 44, 125)$.



Сл. 1

Ако спајамо по два различита од наведених троуглова дуж заједничке катете $x = 117$ као на слици 1, добија се 21 Херонов троугао са страницама $y_1 + y_2$, z_1 и z_2.

За троугао $(284, 125, 267)$ из ове класе важи да је израз $y_1^2 + y_2^2 = 44^2 + 240^2 = 59536 = 244^2$ једнак квадрату природног броја.

Дефиниција 1. Основни Херонов троугао, код кога је збир квадрата одсечака висине на одговарајућој страници квадрат природног броја, зваћемо *регуларан* Херонов троугао. Висину која задовољава претходни услов назовимо *главном висином* тог троугла.

Егзистенција регуларних Херонових троуглова потврђена је претходним примером. У чему је значај регуларних Херонових троуглова илустроваћемо следећом анализом.

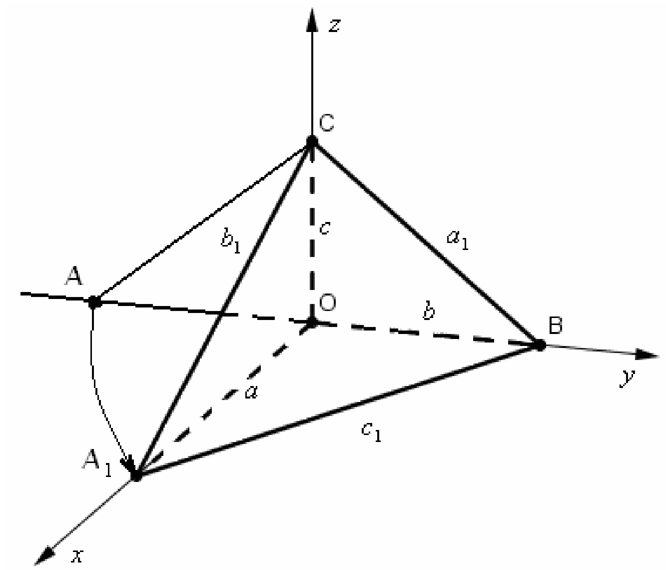
У просторном Декартовом правоуглом кординатном систему $Oxyz$ поставимо регуларан Херонов троугао у yOz раван тако да му главна висина лежи на z оси, а одговарајућа страница на y оси. Тада z оса дели Херонов троугао на два Питагорина троугла са заједничком катетом на тој оси. Осном ротацијом Питагориног троугла над негативним делом y осе за 90° око z осе, тај Питагорин троугао прелази у положај у координатној xOz равни, слика 2.

На тај начин добијамо тетраедар OA_1BC са врхом у координатном почетку и бочним ивицама на координарним осама. Бочне стране тог тетраедра су Питагорини троуглови па и троугао A_1BC има целобројне странице.

Дефиниција 2. Тетраедар коме су све ивице целобројне, а две по две бочне ивице међусобно нормалне зовемо *Питагорин тетраедар*. Бочне ивице називамо *катетама* тетраедра, а основне ивице *хипотенузама* тетраедра. Ако ивице тетраедра немају заједничких делилаца, кажемо да је Питагорин тетраедар *основни*.

Докажимо следећа својства Питагориних тетраедара.

1. *Код основног Питагориног тетраедра једна катета је непарна а друге две парне.*



Сл. 2

Ако би све катете биле парне, тада би и хипотенузе биле парне, па Питагорин тетраедар не би био основни. Докажимо да је највише једна катета парна. Претпоставимо супротно да су бар две катете непарне. Користећи ознаке као на слици 2, нека је рецимо $a = 2k + 1$ и $b = 2l + 1$. Тада је према Питагориној теореми

$$c_1^2 = a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2,$$

што је немогуће, јер квадрат природног броја при дељењу са 4 не даје остатак 2.

2. *Прост број не може бити ивица основног Питагориног тетраедра.*

Јасно је да 2 није катета ниједног правоуглог троугла са целобројним страницама. Без умањења општости можемо претпоставити да је непарна катета a. Нека је $a = p$ и p непаран прост број. Тада се из правоуглих троуглова OA_1B и OAC добијају једнакости $p^2 = c_1^2 - b^2 = b_1^2 - c^2$. Стога еквивалентне једначине $p^2 = (c_1 - b)(c_1 + b)$ и $p^2 = (b_1 - c)(b_1 + c)$ имају само један пар целобројних решења, па је $b_1 = c_1$ и $b = c$. Но тада је троугао OBC једнакокрако-правоугли па хипотенуза a_1 није рационалан број. Дакле, катета a је сложен непаран број.

У чланку [4] дато је решење проблема Питагориних тетраедара, које се изводи из мањих од 1 позитивних рационалних решења једначине

$$\frac{2\xi}{1 - \xi^2} \cdot \frac{2\eta}{1 - \eta^2} \cdot \frac{2\zeta}{1 - \zeta^2} = 1.$$

На основу досад реченог, у потрагу за основним Питагориним тетраедрима ми ћемо кренути полазећи од непарног сложеног броја који би могао бити катета тог тетраедра. Алгоритам за решавање тог проблема се састоји из следећих корака:

1. Изабрати сложен непаран број a.

2. Одредити све парове решења Питагориних троуглова са заједничком катетом a којима су преостале две катете различите.

3. Израчунати збирове квадрата парова различитих катета тако изабраних парова Питагориних троуглова.

4. Ако је збир квадрата тих катета такође квадрат природног броја, онда постоји Питагорин тетраедар са непарном катетом a.

5. Одредити остале ивице Питагориног тетраедра.

Пример 2. Постоји ли Питагорин тетраедар коме је непарна катета:
а) $a = 39$, б) $a = 85$.

Решење. а) За одређивање Питагориних троуглова који би могли бити стране траженог тетредра поставља се једначина $z^2 - y^2 = 1521$. Њој одговарају следећа четири система:

$$z + y = 1521 \wedge z - y = 1, \qquad z + y = 507 \wedge z - y = 3,$$
$$z + y = 169 \wedge z - y = 9, \qquad z + y = 117 \wedge z - y = 13.$$

Њихова решења по промењљивој y су: 760, 252, 80 и 52. Збирови квадрата парова ових бројева су: 641104, 584000, 580304, 69904, 66208 и 9104, од којих ниједан није квадрат природног броја, па не постоји Питагорин тетраедар са катетом 39.

б) Аналогним поступком као у претходном примеру једначини $z^2 - y^2 = 5625$ одговарају системи:

$$z + y = 7225 \wedge z - y = 1, \qquad z + y = 1445 \wedge z - y = 5,$$
$$z + y = 425 \wedge z - y = 17, \qquad z + y = 289 \wedge z - y = 25.$$

Решења по промењљивој y су: 3612, 720, 204, 132. Директним израчунавањем добија се да је само $720^2 + 132^2 = 732^2$ квадрат природног броја. Дакле, постоји Питагорин тетраедар са непарном катетом $a = 85$. Друге две катете су $b = 720$ и $c = 132$. Одговарајуће хипотенузе према ознакама на слици 2 су: $a_1 = 732$, $b_1 = 157$ и $c_1 = 725$.

У наредној табели дато је осам примера Питагориних тетраедара.

a	b	c	a_1	b_1	c_1
85	720	132	725	732	157
117	240	44	267	244	125
187	1584	1020	1037	1595	1884
231	792	160	825	808	281
275	252	240	373	348	365
429	880	2340	2379	979	2500
693	480	140	843	500	707
1155	1100	1008	1533	1595	1492

Задаци за вежбање

1. Колико има укупно, а колико основних Питагориних троуглова са датом катетом $a = 315$?
2. Формирати све праве Херонове троуглове са висином $h = 75$.
3. Доказати да p^2, где је p прост број, не може бити катета основног Питагориног тетраедра.
4. Који од бројева 187, 91 може бити катета Питагориног тетраедра? У случају потврдног одговора одредити остале ивице тетраедра.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, 4. изд, ДМС, Београд 2001.
2. М. Живановић, *Инваријантна пресликавања Питагориних тројки*, Настава математике, **L**, 1–2 (2005), 41–46.
3. М. Живановић, *Генерисање Херонових троуглова без целобројних висина*, Настава математике **LII**, 4 (2007), 24–30.
4. В. Болтянский, *Пифагоровы тетраэдры*, Квант **8**, 29–31, МЦНМО, Москва, 1986.

Техничка школа, Бајина башта

E-mail: `math.milanzi@gmail.com`

ОБАВЕШТЕЊЕ

САВЕТ ЕВРОПСКОГ МАТЕМАТИЧКОГ ДРУШТВА

Изборни састанак **Савета Европског математичког друштва** (EMS, `www.euro-math-soc.eu`) одржан је у Софији 10. и 11. јула 2010. године. На њему су поднети извештаји о раду EMS у протекле четири године. Изабрано је и ново руководство, а председница ће у наредне четири године бити **Marta Sanz-Solé** из Каталонског математичког друштва (Барселона). Србију су на овом састанку представљали *др Зоран Каделбург*, председник ДМС, и *др Душанка Перишић*, професор Природно-математичког факултета у Новом Саду.

Између осталог, на састанку је Организациони одбор реферисао о припремама за **6. европски конгрес математичара** који ће се одржати од 2. до 7. јула 2012. године у Кракову. Детаљи се могу видети на сајту `www.6ecm.pl`.