Синиша Гавриловић

ЈЕДАН ЗАДАТАК О РАСПОРЕДУ ТАЧАКА

Ердеш и Секереш су 1935. године решавали један проблем о распореду тачака у равни.

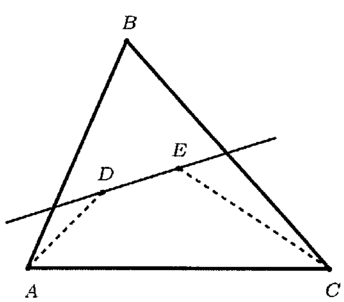
Ердеш-Секереш проблем о распореду тачака у равни

За сваки природан број n, $n \geqslant 3$ одредити најмањи природан број $N(n)$ такав да за било којих $N(n)$ тачака у равни, међу којима не постоје три колинеарне, постоји n тачака које су темена конвексног n-тоугла.

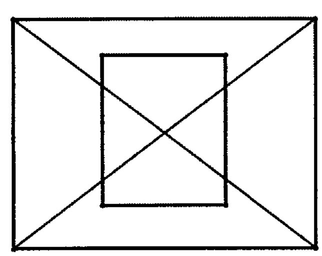
Проблем је иницирала Естер Клајн, која је закључила да било какав распоред 5 тачака садржи 4 тачке које представљају темена конвексног четвороугла. Упркос његовом елементарном карактеру и покушају многих математичара, Ердеш-Секереш проблем је решен само за $n = 3$, 4 и 5.

Јасно, ако је $N(n) \geqslant 3$, тада можемо наћи троугао са теменима у трима од датих $N(n)$ тачака. Да ли увек за $N(n) > 3$ можемо наћи конвексни четвороугао са теменима у тим тачкама? Ако је $N(n) = 4$ а тачке су темена неконвексног четвороугла, тај посао неће нам успети. Ако је, пак, $N(n) \geqslant 5$, онда је при сваком распореду тачака могуће наћи конвексни четвороугао. Доиста, ако је конвексни омотач нашег скупа k-тоугао, где је $k > 3$, у било ком поретку свака четири темена тог k-тоугла су темена траженог четвороугла.

Ако је $k = 3$, конвексни омотач је неки троугао ABC. Тада нађемо две тачке D и E које припадају унутрашњости тог троугла (слика 1). Права $p(D,E)$ не пролази кроз темена троугла ABC. Зато се два темена тог троугла (рецимо A и C) налазе с једне стране праве $p(D,E)$. Дакле, $ACED$ је конвексни четвороугао. Према томе, довољно је да $N(n)$ буде веће од 4.



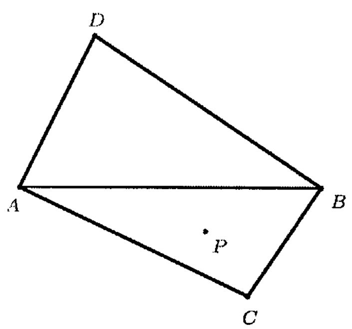
Сл. 1



Сл. 2

Какво треба да буде $N(n)$ да би било могуће издвојити конвексни петоугао? Разјашњавање тог питања и јесте наш циљ. Приметимо да $N(n)$ мора бити веће од 8, што се види са слике 2. Зато, ако докажемо да скуп тачака, од којих никоје три нису колинеарне и никојих пет од њих нису темена конвексног петоугла, садржи највише осам тачака, онда ће задатак бити у потпуности решен.

Нека је N такав скуп тачака. Означимо са K скуп темена његовог конвексног омотача, са L скуп темена конвексног омотача скупа $N \backslash K$, а са M скуп $(N \backslash K) \backslash L$. Размотримо следеће могућности:

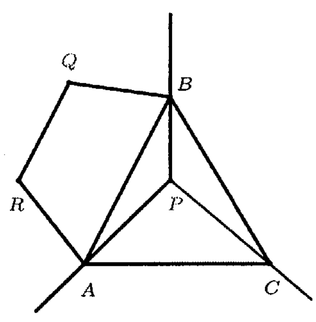


Сл. 3

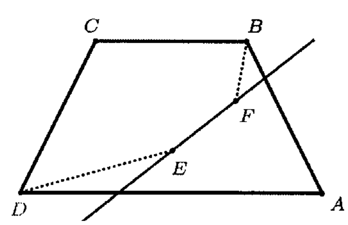
1) *Скуп M је празан.* Тада скуп N садржи само темена многоуглова K и L, тј. највише осам тачака (пошто сваки од многоуглова K и L је троугао или четвороугао).

2) *Скуп M се састоји из тачно једне тачке.* Означимо ту тачку са P. Ако је L четвороугао, повлачењем једне његове дијагонале, делимо га на два троугла. Тачка P лежи у унутрашњости једног од њих. Означимо темена тог троугла са A, B, C (сл. 3). Ако је, пак, L троугао, само означимо његова темена са A, B, C. Тачка P лежи у унутрашњости тог троугла.

У сваком случају међу теменима многоугла L наћи ћемо таква три темена A, B, C, да P буде унутрашња тачка троугла ABC. Повуцимо из тачке P праве $p(P,A)$, $p(P,B)$, $p(P,C)$. Онде деле дату раван на три угла $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPA$. Лако је видети да сваки од тих углова садржи највише једно теме многоугла K. Доиста, нека, на пример, $\angle APB$ садржи два темена многоугла K; онда значи да садржи неку страницу $[RQ]$ многоугла K. Тада су тачке A, P, B, Q, R темена конвексног петоугла (слика 4), што је немогуће.



Сл. 4

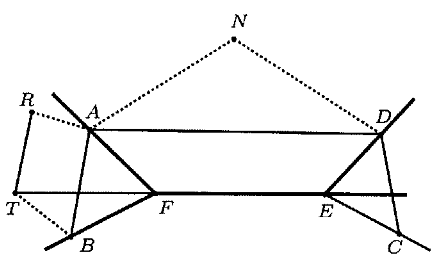


Сл. 5

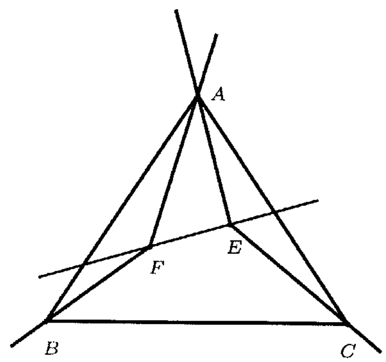
Зато K има највише три темена (по једно у сваком од посматраних углова). Пошто L има највише четири темена, а M се, по претпоставци, састоји из једне тачке P, скуп N садржи највише осам тачака.

3) *Скуп M садржи бар две тачке.* Означимо са E и F било које две тачке скупа M. Претпоставимо најпре да је L четвороугао. Права $p(E,F)$ не пролази кроз темена многоугла L и сече две његове странице. Ако би $p(E,F)$ секла две суседне странице четвороугла L (слика 5), онда би три преостала темена B, C, D четвороугла L, заједно са E и F, била темена конвексног петоугла.

Према томе, $p(E,F)$ сече две наспрамне странице четвороугла L. Нека, на пример, полуправа $pp(E,F)$ сече страницу $[AB]$, а полуправа $pp(F,E)$ сече страницу $[CD]$ (слика 6). Повуцимо полуправе $pp(F,A)$, $pp(F,B)$, $pp(E,C)$ и $pp(E,D)$. Заједно са дужи $[EF]$ оне деле раван на четири дела. Ако би у унутрашњости угла $\angle AFB$ (један од та четири дела) лежала два темена многоугла K, а то значи и нека страница $[TR]$ многоугла K, онда би тачке A, F, B, T, R биле темена конвексног петоугла (слика 6). Дакле, у унутрашњости угла $\angle AFB$ лежи највише једно теме многоугла K.



Сл. 6



Сл. 7

Исто тако, у унутрашњости угла $\angle CED$ лежи највише једно теме многоугла K. Што се тиче преостала два дела, у њима уопште не могу бити смештена темена многоугла K (јер би заједно са тачкама A, F, E, D или B, F, E, C они образовали конвексни петоугао (слика 6)). Добијамо да K има највише два темена (по једно у унутрашњости углова $\angle AFB$, $\angle CED$), што је немогуће, јер је K троугао или четвороугао.

Претпоставимо, на крају, да је L троугао. Права $p(E,F)$ одваја (оставља по страни) једно теме тог троугла. Нека, на пример, полуправа $pp(E,F)$ сече страницу $[AB]$, а полуправа $pp(F,E)$ страницу $[AC]$ (слика 7). Аналогно претходном, наћи ћемо да се у угловима $\angle AEC$ и $\angle AFB$ налази нјајвише по једно теме многоугла K, а део равни ограничен полуправим $pp(E,C)$, $pp(F,B)$ и дужи $[EF]$, засигурно не садржи теме многоугла K.

Према томе, претпоставка да M садржи бар две тачке доводи нас до контрадикције. Ако је, пак, M празан или садржи једну тачку, онда N има највише осам тачака. Тиме је доказ завршен.

Захваљујем се др Ратку Тошићу који ми је несебично помогао приликом избора теме и реализације овог рада.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Tošić, *Konveksne geometrijske figure*, Triangle **4** (2001), 16–26, UM BiH, Sarajevo.
2. О. Бодрожа-Пантић, *Комбинаторна геометрија*, скрипта, ПМФ, Нови Сад, 1998.
3. В. В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, часть 1, Наука, Москва, 1991.
4. В. В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, часть 2, Наука, Москва, 1991.
5. В. Г. Больтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи по комбинаторной геометрии*, Математическая библиотека 5–10 и 38–49, Наука, Москва, 1965.
6. Г. А. Тоноян, часопис *Квант*, **11** (1975), 26–28, УМ ССР, Москва.

ОШ „Јанко Веселиновић“, Шабац
E-mail: ssggavra@ptt.rs

ОБАВЕШТЕЊА

ПРАВИЛНИК О ТАКМИЧЕЊИМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Извршни одбор Друштва математичара Србије, у складу са чланом 25 Статута, донео је нови Правилник о такмичењима ученика основних и средњих школа из математике и информатике. Правилник је објављен на сајту ДМС

www.dms.org.rs

„КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА“

Међународно такмичење „Кенгур без граница“ одржаће се, свуда у Европи па и код нас, 17. марта 2011. године. На такмичењу могу да учествују ученици од другог разреда основне до четвртог разреда средњих школа. Сва обавештења, као и пријављивање такмичара могући су преко сајта

www.dms.org.rs/kengur