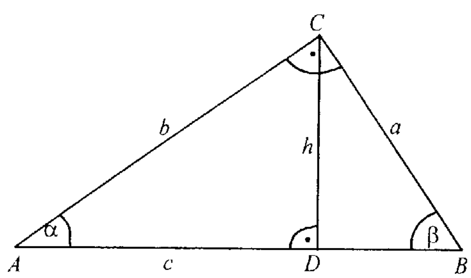
Др Шефкет Арсланагић

ДОКАЗ ЈЕДНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ ЗА ПРАВОУГЛИ ТРОУГАО

Задатак. Доказати да за катете a и b, хипотенузу c и хипотенузину висину h правоуглог троугла важи неједнакост

$$\frac{c+h}{a+b} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$



Слика 1

Решење. Из правоуглог троугла ACD (сл. 1) имамо да је $h = b\sin\alpha$, а из правоуглог троугла ABC да је $b = c\sin\beta$. Зато је $h = c\sin\alpha\sin\beta$. Такође, из троугла ABC иммао $a = c\sin\alpha$ и $b = c\cos\alpha$. Зато је

$$A := \frac{c+h}{a+b} = \frac{c + c\sin\alpha\sin\beta}{c\sin\alpha + c\cos\alpha} = \frac{1+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

(последња једнакост следи из $\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$). Одредићемо сада максималну вриједност израза A.

Пошто је $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, то је $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, тј. $A > 0$. То значи да ће функција $A = A(\alpha)$ имати максималну вриједност, када максималну вриједност буде имала и функција A^2. Имамо

$$A^2 = \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha} = 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^2 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

Сада ће A^2 бити максимално када израз $\dfrac{\sin^2 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$ буде имао максималну вриједност, односно када вриједност израза $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$ буде минимална (ово вриједи због чињенице да је $\sin 2\alpha > 0$). Имамо сада

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \frac{1}{\sin^2 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha},$$

па ће израз $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$ имати минималну вриједност када $\sin 2\alpha$ буде максималан, тј. када је $\sin 2\alpha = 1$. Дакле, мора бити $2\alpha = 90^\circ$, тј. $\alpha = 45^\circ$, што значи да је у питању једнакокрако-правоугли троугао. Коначно добијамо да је

$$\max\left(\frac{c+h}{1+b}\right) = \frac{1+\sin 45^\circ \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cos 45^\circ} = \frac{1+\dfrac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Према томе, вриједи неједнакост $\dfrac{c+h}{a+b} \leqslant \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$, при чему једнакост вриједи ако и само ако је дати троугао једнакокрако-правоугли.

Напомена 1. Максималну вриједност израза $A = \dfrac{c+h}{a+b}$, односно $A(\alpha) = \dfrac{1+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ за $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ могли смо одредити помоћу диференцијалног рачуна, али сматрамо да је овај елементарни доказ ипак љепши.

Напомена 2. У чланку [2] показано је на више начина да је $\dfrac{c+h}{a+b} > 1$. Дакле, вриједи сљедећа двострука неједнакост:

$$1 < \frac{c+h}{a+b} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet, Sarajevo, 2006.

2. Д. Милошевић, *Четири доказа једне неједнакости за правоугли троугао*, Настава математике **LIV**, 4, Београд, 2009.