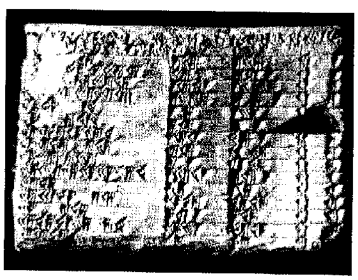
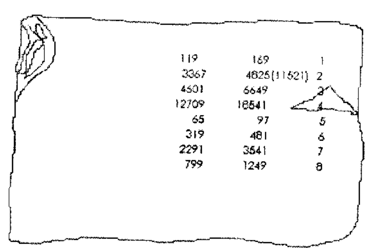
Др Милан Живановић

ДОКАЗ ПИТАГОРИНЕ ТЕОРЕМЕ ЗАСНОВАН НА ЗАКОНИМА МЕХАНИКЕ

Ако су a и b катете а c хипотенуза правоуглог троугла, Питагорина теорема се алгебарски записује као формула $a^2 + b^2 = c^2$. Она омогућава израчунавање треће непознате странице правоуглог троугла, ако су му задате друге две. Старим Грцима су посебно били занимљиви правоугли троуглови са целобројним страницама. Такви троуглови се називају Питагоринином троугловима, а одговарајуће тројке природних бројева (a, b, c) Питагориним тројкама. За тројку $(3, 4, 5)$ Египћани су знали бар 2000 година пре Питагоре. Отуда се троугао са тим страницама често нзива и Египатски. Неки историчари математике тврде да је Вавилонцима било познато опште решење, овог проблема, у скупу природних бројева. Ту претпоставку поткрепљује глинена плоча PIMPLTON 322[1] пронађена у Месопотамији, која даје зачуђујуће велике бројеве као решења поменутог проблема (слика 1). У табели су дате вредности хипотенузе и једне катете.





Слика 1

Историјат Питагорине теореме је веома богат. За њу су знали и користили је пре Питагоре Египћани, Вавилонци, Индуси и Кинези. Елиша Скот Лумис је 1940. године у књизи Питагорина теорема сакупио 367 различитих доказа Питагорине теореме. Књига је прештампана 1980. године.

Шта рећи о значају Питагорине теореме?

[1] Вавилонска глинена плоча из око 1800. год. пре н.е, коју је пронашао амерички археолог Едгар Џемс Бенкс 1922, по коме је направљен фиктиван лик Индијана Џонса. Плочу је откупио Џорџ Адамс Пимплтон, који ју је у својој колекцији завео под редним бројем 322. Пимплтон је колекцију поклонио Колумбија универзитету где се и сада чува.

Прво, без њеног познавања античке цивилизације не би се могле конструисати оне монументалне грађевине које су њима биле на корист, а нама за дивљење. Развој науке кроз векове незамислив је без геометрије, а геометрија незамислива без Питагорине теореме. Математичар Скот Броди је показао еквивалентност Плејферове аксиоме паралелности и Питагорине теореме. Сада знамо да постоје и друге геометрије, али њих не би било без Еуклидске. Растојање између две тачке $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ у Еуклидском простору, рачуна се помоћу формуле $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, која је једно уопштење Питагорине теореме. Исто важи и за основни тригонометријски идентитет $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Можемо рећи да Питагорина теорема представља језгро великог броја фундаменталних тврђења у разним математичким дисциплинама, а самим тим и у наукама, којима те математичке дисциплине дају основне методе научног истраживања и закључивања.

На крају прошлог миленијума прављене су разне тзв. топ листе 100 најбољих. Ни математичари нису остали имуни, па су на једној математичкој конференцији у јулу 1999. године Пол и Џек Абад[2] представили своју листу 100 најзначајнијих математичких теорема. На прво место поставили су питагорејско откриће ирационалних бројева, а на четвртом месту је Питагорина теорема. Наравно да су листе оваковог типа субјективне, али ипак нису без значаја. Интересантно да је на овој листи још једнан резултат везан за Питагорину теорему. Наиме, Еуклидово решење проблема Питагориних тројки сврстано је на 23. место.

Ако Питагорина теорема на овој табели заузима четврто место, не може се порећи да је свакако најпознатије и најпопуларније тврђење у математици, а можда и у науци уопште. Сама чињеница да постоји неколико стотина доказа ове теореме, довољно говори о томе. Ни у трећем миленијуму математичари нису одустали од изналажења нових могућности доказивања и примене Питагорине теореме. Можемо слободно рећи да је Питагорина теорема вечита инспирација математичара, а свакако не и само математичара.

Данас је познато више стотина доказа Питагорине теореме. Према поступцима који се користе у тим доказима, можемо говорити о геометријским, алгебарским, визуелним и осталим доказима. Тако у геометријским доказима користимо разлагање различитих површина и њихово изједначавање по деловима. Посебну класу геометријских доказа чине визуелни или докази без речи. Код тих доказа се одговарајуће фигуре анимацијом преливају једна у другу, или представљају слику, или низ слика у којима су одговарајуће површине обојене истим бојама, те се тако лакше уочава једнака геометријска разложивост појединих фигура.

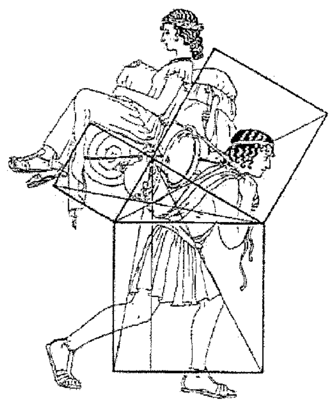
У алгебарским доказима се углавном користи нека алгебарска трансформација из које следи једнакост одговарајућих површина. Међутим мора се истаћи да граница између ове две врсте доказа није увек оштра. Постоје докази који имају елементе и једне и друге врсте, а наравно и они докази који се не могу сврстати у поменуте класе доказа. Такви су докази који се заснивају чак и на

[2] Погледати на `http://blog.drscottfranklin.net/category/favorite-theorems/`.

резултатима диференцијалног и интегралног рачуна[3], на законима механике итд.

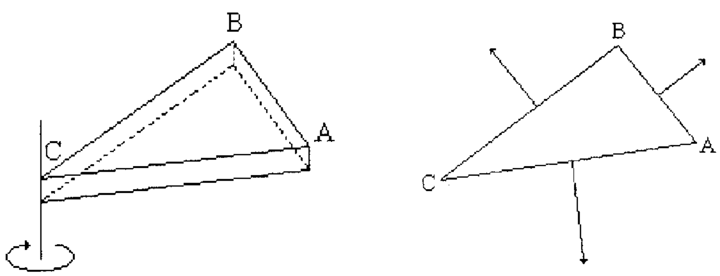
Први писани доказ Питагорине теореме појављује се у I књизи Еуклидових „Елемената“ као 47. теорема. Код Еуклида је у VI књизи у теореми 31. дато и једно уопштење Питагорине теореме.

По Проклу[4] тај доказ и јесте Еуклидов. Ипак постоје и мишљења да тај доказ потиче од Питагоре, или бар неког од његових ученика. То је свакако најпознатији и најпопуларнији доказ. Познат је под називом Bride's Chair (невестина столица) а био је инспиративан и уметницима (слика 2).



Слика 2

У класу „осталих“ доказа спада следећи доказ заснован на законима механике. Доказ се може интерпретирати у настави у средњој школи, а изузетно је погодан за корелацију у настави са физиком, механиком.



Слика 3

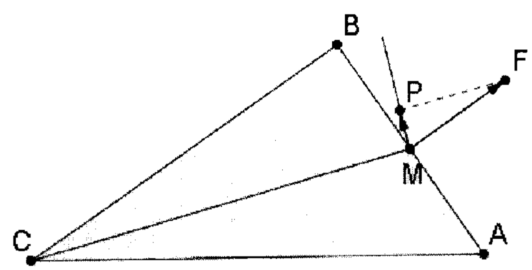
Нека се у правој тространој призми налази неки гас (слика 3). Он врши притисак на стране призме. Пошто је притисак равномеран, сила притска, која

[3] Погледати четрдесети доказ на `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml`

[4] Прокло Дијадох (412–485. год. н.е) је био антички, односно рановизантијски неоплатонски филозоф. Био је управник неоплатонске школе у Атини. Писао је коментаре Еуклида, Платона, Птоломеја.

делује на тежиште стране, пропорционална је површини те стране. Силе које делују на горњу и доњу основу призме се поништавају. Кад посматрамо изоловано једну од сила која делује на неку бочну страну, она би изазвала ротацију те призме око фиксиране осе која садржи теме C и која је управна на основе. Момент силе ће бити $\pm Fr$, где је F сила која изазива ротацију а r крак те силе. Знак $+$ узимамо у случају да сила изазива ротацију супротно од кретања казаљке на сату а $-$ у супротном случају.

Дакле, силе су пропорционалне величинама $h \cdot AB$, $h \cdot BC$ и $h \cdot AC$, где је h висина призме. Одговарајући моменти су $h \cdot BC \cdot \dfrac{BC}{2}$, $-h \cdot AC \cdot \dfrac{AC}{2}$ и $PM \cdot MC$. У случају силе наспрам темена C ротацију изазива компонента PM силе MF, која је нормална на CM (слика 4). Како су троуглови CMB и FMP слични, то је $CM/BM = MF/PM$, одакле је $PM \cdot MC = MF \cdot BM = h \cdot AB \cdot \dfrac{AB}{2}$.



Слика 4

Узимајући да је сума момената ових сила једнака нули, јер се призма налази у стању мировања, добија се:

$$h \cdot BC \cdot \frac{BC}{2} - h \cdot AC \cdot \frac{AC}{2} + h \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} = 0.$$

После скраћивања са $h/2$ и премештања негативног израза на десну страну, имамо на крају једнакост

$$BC^2 + AB^2 = AC^2.$$

Прав угао је у темену B.

Техничка школа, Бајина Башта