Тине Голеж

ПРИМЕНА ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ НИЗА И ИНТЕГРАЦИЈЕ У ФИЗИЦИ

Увод

Сасвим је јасно да је математика језик физике. Међутим, у средњој школи то није баш увек добро презентовано. Има, рецимо, примера кад наставник математике употребљава задатке којима жели да прикаже примену извода или интеграла у физици. У суштини, врло често су такозвани реалистични задаци у ствари нереалистични. На пример, „колика је кинетичка енергија тела масе 50 g, после пете секунде падања, ако је $x = 5(t - t^2)\,\mathrm{cm}$?“ Може ли наставник да објасни које тело подлеже овом закону?

Наставник физике имао је у току школовања више математике него обрнуто, тако да је он тај који би требало да предлаже реалне физичке примере који се могу употребити у настави математике. У сагласности са овим тврђењем дајемо овде један пример који има две функције. С једне стране, односи се на реалистични пример у математици. Такође, приказује како је интеграл изванредно оруђе математике. Свакако и без интеграла је било могуће много тога израчунати – тако чак ни Њутн није употребио интеграле у свом епохалном делу Математички принципи филозофије природе (Principia Mathematica Philosophiae Naturalis), иако је баш он један од оснивача инфинитезималног рачуна.

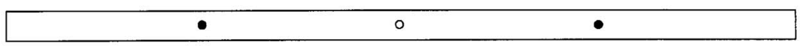
Свакако, интеграција омогућава да и људи са мање интуиције савладају задатке који су пре били решиви уз више напора. Један пример је познато израчунавање сегмента параболе. Архимед је дошао до решења без интеграла [1]. Данас би и ђаци, који нису нешто нарочито талентовани, употребом интеграла као по рецептури дошли до решења. Али треба нешто више интуиције и размишљања да до резултата дођемо као Архимед. Пошто је овај пример врло познат, и неки га сврставају међу 100 најинтересантнијих проблема елементарне математике [2], не треба га понављати овде. Али баш зато је овде описан физички пример у којем интеграцију најпре замени збир бесконачног реда, а тек онда прелазимо на интеграцију.

Момент инерције штапа

У случају гимназија у Словенији, ђаци се прво упознају са моментом инерције материјалне тачке, а за сложена тела наставник физике само испише формуле.

Али баш ово пружа могућност реалистичне математике. На почетку четврте године математичари објашњавају бесконачне редове. Зато предлажем да наставник математике, употребом бесконачног реда, докаже формулу за сопствени момент инерције штапа, и после неколико месеци, кад је испредавао интеграле понови исти пример методом интеграције.

Ђаци знају формулу за инерцију материјалне тачке масе m, која се креће по кружној путањи полупречника r, $I = mr^2$. Нека је дат штап дужине ℓ и масе m. Сасвим је јасно да за одређивање његовог момента инерције не можемо узети да је сва маса сконцентрисана у тежишту. Тада би било $r = 0$, па би и момент инерције био једнак нули, што није случај. Зато можемо претпоставити да уместо штапа имамо две тачке са масом половине масе штапа, које су за четвртину дужине штапа удаљене од центра ротације (слика 1).

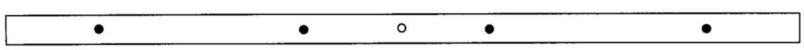


Сл. 1. Штап са осом у центру. Тачке тежишта леве и десне половине штапа су назначене.

Укупни момент инерције ове две материјалне тачке је

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{4}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{4}\ell\right)^2.$$

Свакако, ово је тек прва апроксимација. Зато ћемо штап сада поделити на четири дела (слика 2).



Сл. 2. Штап је подељен на четири једнака дела.
Удаљености тежишта делова од осе ротације су 1/8 и 3/8 дужине штапа.

Друга апроксимација момента инерције је

$$I_2 = \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{8}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{3}{8}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{8}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{3}{8}\ell\right)^2.$$

Прва апроксимација је $I_1 = 0{,}0625\,m\ell^2$, а друга $I_2 = 0{,}0780\,m\ell^2$. Ова разлика упућује нас на нове апроксимације. Овај пут ћемо поделити штап на осам једнаких делова и добијамо

$$\begin{aligned} I_3 = {} & \left(\frac{1}{8}m\right)\left(\frac{1}{16}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)\left(\frac{3}{16}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)\left(\frac{5}{16}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)\left(\frac{7}{16}\ell\right)^2 \\ & + \left(\frac{1}{8}m\right)\left(\frac{1}{16}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)\left(\frac{3}{16}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)\left(\frac{5}{16}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)\left(\frac{7}{16}\ell\right)^2. \end{aligned}$$

Дидактички, више није потребно писати једначину по члановима, већ можемо скратити запис:

$$I_3 = 2\left(\frac{1}{8}m\right)\ell^2\left(\frac{1}{16}\right)^2(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2).$$

Резултат је $I_3 = 0{,}0820\, m\ell^2$. Уместо поделе на 16 делова потражићемо одмах поделу на n делова. Гледајући једначину за I_3, једноставно можемо записати

$$I_n = 2\left(\frac{1}{n}m\right)\ell^2\left(\frac{1}{2n}\right)^2(1^2+3^3+\cdots+(2n-1)^2).$$

Претпостављамо да ђаци у четвртој години гимназије знају коначни збир

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Међутим, нама треба збир квадрата непарних бројева. Од збира свих квадрата одузећемо квадрате парних бројева. Њихов збир је

$$\begin{aligned}2^2+4^2+\cdots+n^2 &= 2^2(1^2+2^2+\cdots+(n/2)^2)\\ &= 2^2\frac{(n/2)((n/2)+1)(n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Зато је збир квадрата непарних бројева једнак $\dfrac{n(n^2-1)}{6}$. После сређивања можемо записати

$$I_n = 2m\ell^2\left(\frac{1}{n\cdot 4n^2}\cdot\frac{n(n^2-1)}{6}\right)$$

и у граничном случају, када $n\to\infty$, добијамо израз за сопствени момент инерције штапа

$$I=\frac{1}{12}m\ell^2$$

који је без извођења у настави физике у другом разреду написан као готова формула.

Чини нам се да је приказани задатак због реалног резултата вреднији од врло често записаних задатака у уџбеницима („У правилном шестоуглу странице a уписана је кружница, у њој опет правилан шестоугао ... Одредити збир површина шестоуглова и кругова“. Или: „У коцки ивице a уписана је лопта, у лопти коцка ... Одредити запремине ... “ итд. [3]).

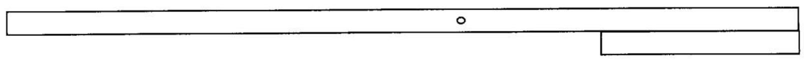
Интеграција

Инеграл долази после лимеса и извода. Педагошки је да се исти пример још једном уради помоћу интеграла [4]. Полазимо од момента инерције материјалне тачке dm на растојању r од осе, $dI = r^2\,dm$. У случају хомогеног штапа са осом кроз тежиште добијамо

$$I=\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dI=\int_{-\ell/2}^{\ell/2} r^2\rho S\,dr=\frac{1}{12}\rho S\ell\ell^2=\frac{1}{12}m\ell^2.$$

Интеграција не само да је бржи поступак, већ је и много елегантнији пут за решавање сложенијих примера.

Замислимо штап дужине 80 cm на којег смо налепили додатни штап од 20 cm (слика 3).



Сл. 3. Штап са додатним штапом. Тежиште није више на средини штапа.

Прво налазимо тежиште. Налази се 46 cm од левог краја. Кроз тежиште пролази оса. Сада интеграл добија један од могућих облика

$$I = \int_{-0{,}46}^{0{,}14} r^2 \rho S \, dr + \int_{0{,}14}^{0{,}34} r^2 \rho \cdot 2S \, dr.$$

Закључак. У историји науке физика и математика су се стално преплитале и међусобно богатиле. Нажалост, данас је међупредметна сарадња недовољно присутна у школама. Није увек лако придобити колегу математичара за убацивање нових физичких примера у наставу математике. Али уз добро припремљене теме, које свакако у већем делу сугерише наставник физике, можемо очекивати и интересантнију наставу математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. `http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ArchimedesTriangle.shtml`
2. H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, NY, 1965.
3. Б.Т. Вене, *Збирка решених задатака из математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 1985.
4. T. Golež, *Fizika in matematika vs. fizika, matematika*, Matematika v šoli, **13**, 3–4 (2007), 234–243.

Шкофијска класична гимназија, Љубљана, Словенија

E-mail: `tine.golez@guest.arnes.si`