Белма Алихоџић

ЗНАЧАЈ И АНАЛИЗА ДОМАЋИХ ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Домаћи рад ученика се јавља као посебна врста ваншколског рада ученика, који повезује часове математике у васпитно-образовном процесу. Домаћи задаци, уколико су добро осмишљени и систематизовани са радом на часу, чине део наставе. Редовном израдом домаћих задатака ученици утврђују и продубљују знање и стичу радне навике. Квалитет израде домаћих задатака зависи од начина проверавања. Циљ проверавања не би требало да буде у томе да ли су ученици удовољили постављеном захтеву, већ да се утврди шта су добили у процесу израде, колико су сигурна њихова знања и како повезују теорију са праксом.

Треба се придржавати принципа да сваки ученик мора да буде информисан о резултату свога рада, што је сложено за наставника, али изводљиво. Како пронаћи најбољи и најефикаснији начин да се анализирају домаћи задаци? Најефикаснији начин провјеравања домаћих задатака је анализа истих. Како се за домаћи рад обично даје мањи број задатака, могуће је за неколико минута на часу извршити кратку анализу тих задатака.

Предлог и поступак би био следећи.

На захтев наставника, одређени ученик прочита први задатак и укратко образложи поступак решавања наводећи особине (теореме, правила) које је применио и крајњи резултат који је добио. Остали ученици прате образложење и упоређују своје резултате са изнетим. Ако је некоме другачији резултат, он то бележи, да би тај задатак поново урадио. Затим се исти поступак примењује на следећи задатак. Ако неки од задатака већина ученика није могла да ријеши, или им се резултати не слажу, онда се такав задатак ради на часу.

Ово ћемо илустровати конкретним примерима за први, други, трећи и четврти разред средње школе.

- I разред средње школе

1. Извршити одузимање $\dfrac{5}{a^2+a-6}-\dfrac{4}{a^2-4}$.

2. Израчунати дужину крака једнакокраког троугла ако је дужина његове основице $10\,\mathrm{cm}$, а површина $60\,\mathrm{cm}^2$.

Решења.

1. На захтев наставника један ученик даје следеће образложење решења за први задатак.

Да бисмо одузели ова два разломка треба да нађемо њихов најмањи заједнички садржалац. Раставићемо у првом разломку именилац на факторе преко средњег члана као $a^2+a-6 = a^2+3a-2a-6$, па груписањем чланова и извлачењем заједничког фактора испред заграде добијамо $a(a+3)-2(a+3) = (a+3)(a-2)$. Сада имамо:

$$\begin{aligned}\frac{5}{a^2+a-6} - \frac{4}{a^2-4} &= \frac{5}{(a+3)(a-2)} - \frac{4}{(a-2)(a+2)} = \frac{5(a+2)-4(a+3)}{(a+3)(a-2)(a+2)}\\ &= \frac{5a+10-4a-12}{(a+3)(a-2)(a+2)} = \frac{a-2}{(a+3)(a-2)(a+2)} = \frac{1}{(a+3)(a+2)},\end{aligned}$$

при чему је $a \neq 2$, $a \neq -2$, $a \neq -3$.

Други ученик се јавља и нуди друго решење. Каже да је именилац првог разломка раставио на линеарне факторе на следећи начин: $a^2+a-6 = a^2-4+a-2 = (a-2)(a+2)+(a-2) = (a-2)(a+3)$. Даље је поступак спровео као и претходни ученик.

Наставник инсистира да ученици провере своје резултате и похваљује ученике који су дошли до решења.

2. На захтев наставника, одређени ученик анализира други задатак на следећи начин. Помоћу дате основице и дате површине из формуле $P = \dfrac{ah}{2}$ израчунао сам висину једнакокраког троугла; она износи 12 cm, а затим сам применио Питагорину теорему $b^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ и израчунао крак, који износи 13 cm. Наставник може поставити питање како гласи Питагорина теорема, код којих се троуглова може применити или чак да је неко од ученика и докаже. Проверавањем решења и задужењем ученика да исправе решења и поступак ко није тачно урадио, завршава се анализа домаћег задатка.

- II разред средње школе

1. Ако се странице троугла продуже за једнаке дужине, троугао постане правоугли. Колико је продужење ако су странице троугла 3 cm, 5 cm и 7 cm?

2. Израчунати $\sqrt{6+2\sqrt{8}} + \sqrt{6-2\sqrt{8}}$.

Решења.

1. Означимо продужење странице троугла са x. Тада странице поменутог правоуглог троугла можемо писати као $3+x$, $5+x$ и $7+x$. Применимо ли Питагорину теорему на добијени правоугли троугао добићемо $(3+x)^2+(5+x)^2 = (7+x)^2$, тј. $9+6x+x^2+25+10x+x^2 = 49+14x+x^2$, одакле добијамо квадратну једначину $x^2+2x-15=0$. Њена решења су $x_1=-5$ и $x_2=3$. Како се ради о дужини дужи, решење не може бити негативно. Дакле тражено продужење је $x = 3\,\mathrm{cm}$.

2. Користећи особину $\sqrt{x^2} = x$ за $x > 0$, имамо:

Решење 1.

$$\sqrt{6+2\sqrt{8}} + \sqrt{6-2\sqrt{8}} = \sqrt{\left(\sqrt{6+2\sqrt{8}} + \sqrt{6-2\sqrt{8}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{6+2\sqrt{8}+2\sqrt{(6+2\sqrt{8})(6-2\sqrt{8})}+6-2\sqrt{8}} = \sqrt{12+2\sqrt{36-32}}$$

$$= \sqrt{12+4} = 4.$$

Решење 2.

$$\sqrt{6+2\sqrt{8}}+\sqrt{6-2\sqrt{8}} = \sqrt{6+2\sqrt{4\cdot 2}}+\sqrt{6-2\sqrt{4\cdot 2}} = \sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$$

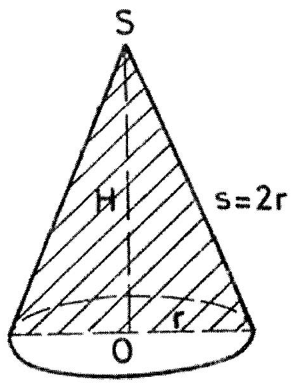
$$= \sqrt{4+2+4\sqrt{2}} + \sqrt{4+2-4\sqrt{2}} = \sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2+4\sqrt{2}} + \sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4.$$

• III разред средње школе

1. Осни пресек купе је једнакостранични троугао површине $P_1 = 16\sqrt{3}$. Одредити површину купе.

2. На правој $4x + 3y - 12 = 0$ наћи тачку подједнако удаљену од тачака $(-1, -2)$ и $(1, 4)$.



Сл. 1

Решења. 1. Површина једнакостраничног троугла странице $2r$ је $P_1 = \dfrac{(2r)^2}{4}\sqrt{3}$. Уврстимо ли нумеричку вредност за P_1, добићемо $r^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$, одакле је $r^2 = 16$ и $r = 4$.

Код једнакостраничног троугла (сл. 1) изводница је $s = 2r = 8$, па је висина купе $H = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Површина купе је $P = r^2 + r\pi s$, односно $P = 4^2\pi + 4\pi \cdot 8 = 48\pi$.

2. Нека је $S(a, b)$ тражена тачка. Она припада датој правој па важи $4a + 3b - 12 = 0$ (1). Како је $d(A, S) = d(B, S)$, при чему $d(X, Y)$ означава растојање између тачака X и Y, то је

$$\sqrt{(1-a)^2 + (4-b)^2} = \sqrt{(-1-a)^2 + (-2-b)^2}.$$

Квадрирањем и срећивањем добијамо $a + 3b - 3 = 0$ (2). Решимо систем којег чине једначине (1) и (2),

$$4a + 3b = 12,$$
$$a + 3b = 3,$$

и добијамо да је $a = 3$ и $b = 0$. Дакле, $S(3, 0)$ је тражена тачка.

• IV разред средње школе

1. Доказати неједнакост $2^n > n^2$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 4$.

2. Збир три броја који образују растућу геометријску прогресију је 126. Ако је средњи члан 24, колики је најмањи члан геометријске прогресије ?

Решења.

1. Доказ изведимо помоћу принципа математичке индукције .

I. За $n = 5$ имамо $2^5 > 5^2$, тј. $32 > 25$, што је тачно.

II. Претпоставимо да тврђење важи за неко $n = k \geqslant 5$, тј. да је $2^k > k^2$, $k \geqslant 5$. Докажимо да оно важи и за $n = k + 1$. Из $2^k > k^2$ следи $2^{k+1} > 2k^2$ (1). Како за $k \geqslant 3$ (и тим пре за $k \geqslant 5$) важи $(k-1)^2 \geqslant 2$, то је $k^2 - 2k + 1 \geqslant 2$, затим $k^2 \geqslant 2k + 1$ и $2k^2 = k^2 + k^2 \geqslant k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ (2). Из неједнакости (1) и (2) добијамо да је $2^{k+1} > k + 1$.

На основу принципа математичке индукције, закључујемо да дата неједнакост важи за сваки природан број $n > 4$.

2. Дату геометријску прогресију (низ) можемо записати у облику a, aq, aq^2, при чему је a први члан низа, а q количник геометријске прогресије. Сада имамо: $a + aq + aq^2 = 126$ и $aq = 24$. Из друге једначине је $a = \dfrac{24}{q}$ и увршатавањем у прву једначину добијамо

$$\frac{24}{q} + 24 + q^2\frac{24}{q} = 126,$$

односно $4q^2 - 17q + 4 = 0$. Решења ове квадратне једначине су $q_1 = 4$ и $q_2 = \dfrac{1}{4}$. Пошто се ради о растућој геометријској прогресији, количник q мора бити већи од 1, па је тражено решење $q = 4$. Тражена програсија гласи: $6, 24, 96$.

Сада ћемо набројати неке најважније функције математичких задатака у добро припремљеној и организованој настави математике:

а) образовна функција (ту се мисли на стицање одређених знања, формирање вештина и навика, овладавање математичком симболиком и терминологијом);

б) васпитна функција (навикавање ученика на самосталан рад, развијање математичког начина мишљења и математичке мотивације, развијање креативности, стварање радних навика);

в) дидактичка функција (мотивирајућа улога, понављање као увод у нову тему, илустрација и поткрепљење нових садржаја, понављање и утврђивање градива, повезивање појединих подручја и целина, контрола и проверавање знања).

Овде треба истаћи да ученик треба да буде информисан о начину свог рада, а наставник је дужан да покаже што више начина како да се реши један задатак и да похвали и награди ученике који су задатак решили на други начин. Подсетимо се још једном шта је о значају решавања математичког задатка на више начина рекао чувени математичар и методичар George Polya (1887–1985): „Корисније је један задатак решити самостално, него стотине решених задатака репродуковати.

Много је боље један задатак решити на више начина, различитим методама, него мноштво задатака решити истом методом“.

На крају, може се закључити да је редовна анализа домаћих задатака уз детаљан преглед свезака за домаћи рад најефикаснији начин контроле и провере домаћих задатака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, Sarajevo, 2001.
2. S. Petrović, *Domaći zadaci u nastavi matematike*, Matematika, **1**, 86–88, Sarajevo, 1979.
3. J. Пинтер, Н. Петровић, В. Сотировић, Д. Липовац, *Општа методика наставе математике*, Сомбор, 1996.

E-mail: balihodzic@gmail.com