Др Шефкет Арсланагић

О НЕЈЕДНАЧИНАМА С АПСОЛУТНИМ ВРЕДНОСТИМА

Овде ће бити речи о решавању неједначина облика

$$|f(x)| \geqslant a, \qquad a > 0. \tag{1}$$

Знамо да је $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ као и

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a, \text{ као и } |x| \geqslant a \iff x \geqslant a \vee x \leqslant -a.$$

Сада је (1) еквивалентно са

$$f(x) \geqslant a \vee f(x) \leqslant -a \qquad (a > 0). \tag{2}$$

Унија скупова решења горње две неједначине представља скуп решења неједначине (1). Ово ћемо демонстрирати на једном примеру.

Пример 1. Решити неједначину

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \geqslant 2. \tag{3}$$

Решење. Према (2) добијамо

$$\frac{x-2}{x+1} \geqslant 2 \vee \frac{x-2}{x+1} \leqslant -2 \qquad (x \neq -1).$$

Нађимо решења прве неједначине; имамо:

$$\frac{x-2}{x+1} \geqslant 2 \iff \frac{x-2}{x+1} - 2 \geqslant 0 \iff \frac{-x-4}{x+1} \geqslant 0 \iff \frac{x+4}{x+1} \leqslant 0.$$

Коришћењем таблице на сл. 1 добијамо решења $x \in [-4, -1)$.

	$-\infty$ -4	-4 -1	-1 $+\infty$
$x+1$	$-$	$-$ 0	$+$
$x+4$	$-$ 0	$+$	$+$
količnik	$+$	!	$+$

Сл. 1

	$-\infty$ -1	-1 0	0 $+\infty$
$3x$	$-$	$-$ 0	$+$
$x+1$	$-$ 0	$+$	$+$
količnik	$+$	!	$+$

Сл. 2

За другу неједначину имамо:

$$\frac{x-2}{x+1} \leqslant -2 \iff \frac{x-2}{x+1} + 2 \leqslant 0 \iff \frac{3x}{x+1} \leqslant 0.$$

Коришћењем таблице на сл. 2 добијамо решења $x \in (-1, 0]$. Решење дате неједначине (3) је унија претходно добијених скупова,

$$x \in [-4, -1) \cup (-1, 0].$$

Ово није било тешко. Но, у једном приручнику из математике сам нашао следеће решење овог задатка.

На основу дефиниције апсолутне вредности имамо да је

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right| = \begin{cases} \frac{x-2}{x+1}, & \text{за } \frac{x-2}{x+1} \geqslant 0, \\ -\frac{x-2}{x+1}, & \text{за } \frac{x-2}{x+1} < 0. \end{cases}$$

Количник $\dfrac{x-2}{x+1}$ је дефинисан за $x+1 \neq 0$, односно за $x \neq -1$. Формирајмо сада табелу знака тог количника (сл. 3). Из табеле видимо да је $\dfrac{x-2}{x+1} \geqslant 0$ за све $x \in (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$, те $\dfrac{x-2}{x+1} < 0$ за све $x \in (-1, 2)$. Због тога имамо

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right| = \begin{cases} \frac{x-2}{x+1}, & \text{за } x \in (-\infty, -1) \cup [2, +\infty), \\ -\frac{x-2}{x+1}, & \text{за } x \in (-1, 2). \end{cases}$$

	$-\infty$ … -1	-1 … 2	2 … $+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0 $+$
$x+1$	$-$	0 $+$	$+$
količnik	$\oplus$	$-$	$\oplus$

Сл. 3

	$-\infty$ … -4	-4 … -1	-1 … $+\infty$
$-x-4$	$+$	0 $-$	$-$
$x+1$	$-$	$-$	0 $+$
količnik	$-$	$\oplus$	$-$

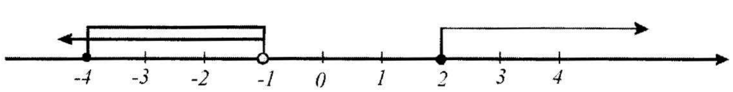
Сл. 4

Сада размотримо два случаја.

1) $x \in (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$. Тада је полазна неједначина облика

$$\frac{x-2}{x+1} \geqslant 2 \iff \frac{x-2}{x+1} - 2 \geqslant 0 \iff \frac{-x-4}{x+1} \geqslant 0.$$

На основу табеле знакова (сл. 4) добијамо скуп решења неједначине $x \in [-4, -1)$. Ово решење смо добили уз почетни услов $x \in (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$, па треба наћи пресек (сл. 5). Решење је $x \in [-4, -1)$.



Сл. 5

2) Нека је сада $x \in (-1, 2)$. Тада је полазна неједначина облика

$$-\frac{x-2}{x+1} \geqslant 2 \iff \frac{x-2}{x+1} + 2 \leqslant 0 \iff \frac{3x}{x+1} \leqslant 0 \iff \frac{x}{x+1} \leqslant 0.$$

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
x	−	− 0	+
$x+1$	− 0	+	+
količnik	+	!	+

Сл. 6

Добијену неједначину решавамо помоћу табеле на сл. 6. Из табеле видимо да су решења $x \in (-1, 0]$. Пресек овог интервала са почетним условом $x \in (-1, 2)$ даје $x \in (-1, 0]$.

Коначно решење дате неједначине је унија решења у условима 1) и 2), тј.

$$x \in [-4, -1) \cup (-1, 0].$$

Ово решење задатка је кудикамо сложеније. Има у њему непотребних ствари. Упоређујући два дата решења могли бисмо поставити питање: „Зашто једноставно када може компликовано?“

Међутим, да смо имали неједначину облика

$$|f(x)| \leqslant g(x),$$

онда бисмо морали приступити решавању као код другог решења датог задатка. Посматраћемо, на пример, неједначину

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \leqslant \frac{x+1}{x-3}.$$

Дата неједначина је дефинисана за све $x \neq 1$ и $x \neq 3$, тј. за $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 3\}$. Сада имамо

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1}, & \frac{x+2}{x-1} \geqslant 0, \text{ тј. } x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty), \\ -\frac{x+2}{x-1}, & \frac{x+2}{x-1} < 0, \text{ тј. } x \in (-2, 1). \end{cases}$$

Посматрајмо следећа два случаја.

1) $x \in (-\infty, -2] \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$. Тада неједначина добија облик

$$\frac{x+2}{x-1} \leqslant \frac{x+1}{x-3} \iff \frac{x+2}{x-1} - \frac{x+1}{x-3} \leqslant 0 \iff \frac{-x-5}{(x-1)(x-3)} \leqslant 0$$

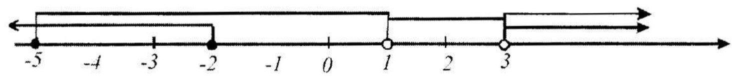
$$\iff \frac{x+5}{(x-1)(x-3)} \geqslant 0.$$

Одговарајућа табела дата је на слици 7. Решења су $x \in [-5, 1) \cup (3, +\infty)$. Пресек са почетним условом (слика 8) даје коначно решење овог случаја

$$x \in [-5, -2] \cup (3, +\infty).$$

	$-\infty$ … -5	-5 … 1	1 … 3	3 … $+\infty$
$x+5$	− 0	+	+	+
$x-1$	−	− 0	+	+
$x-3$	−	−	− 0	+
količnik	−	⊕	−	⊕

Сл. 7



Сл. 8

2) $x \in (-2, 1)$. Дата неједначина добија облик

$$-\frac{x+2}{x-1} \leqslant \frac{x+1}{x-3} \iff \frac{x+1}{x-3} + \frac{x+2}{x-1} \geqslant 0 \iff \frac{2x^2-x-7}{(x-3)(x-1)} \geqslant 0.$$

Решења једначине $2x^2 - x - 7 = 0$ су $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{4}$ $\left(x_1 = \dfrac{1-\sqrt{57}}{4} \approx -1{,}65,\right.$ $\left.x_2 = \dfrac{1+\sqrt{57}}{4} \approx 2{,}15\right)$, па је $2x^2 - 2 - 7 = 2(x-x_1)(x-x_2)$ и дата неједначина постаје

$$\frac{2(x-x_1)(x-x_2)}{(x-3)(x-1)} \geqslant 0.$$

Одговарајућа табела дата је на слици 9.

	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{57}}{4}$		1		$\frac{1+\sqrt{57}}{4}$		3		$+\infty$
$x-\frac{1-\sqrt{57}}{4}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-\frac{1+\sqrt{57}}{4}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
količnik		$\oplus$		$-$		$\oplus$		$-$		$\oplus$	

Сл. 9

Решења су

$$x \in (-\infty, x_1] \cup (1, x_2] \cup (3, +\infty),$$

а пресек овог скупа са почетним условом $x \in (-2, 1)$ даје решење овог случаја $x \in (-2, x_1]$.

Коначно решење је унија решења у случајевима 1) и 2), тј.

$$x \in [-5, x_1) \cup (3, +\infty) = \left[-5, \frac{1-\sqrt{57}}{4}\right] \cup (3, +\infty).$$

Задаци за вежбу

1. $\left|\dfrac{x-3}{x+2}\right| \leqslant 3$. 2. $\left|\dfrac{x-3}{x+2}\right| \geqslant \dfrac{x+1}{x-1}$. 3. $\left|\dfrac{x+5}{x-5}\right| \geqslant \dfrac{x-5}{x+5}$.

Природно-математички факултет Сарајево, БиХ

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba