Драгољуб Милошевић, Борисав Симић

ПЕТ РЕШЕЊА ЈЕДНОГ ЗАДАТКА ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

У уџбенику тригониметрије [1] налази се следећи задатак.

Наћи без употребе рачунских помагала вредности основних тригонометријских функција од $\dfrac{\pi}{8}$.

Даћемо пет различитих решења овог задатка, не користећи ни рачунска помагала, ни адиционе формуле.

Решење 1. Нека је хипотенуза AB једнакокраког правоуглог троугла ABC једнака 2 (сл. 1). Нека симетрала угла с теменом A сече наспрамну страницу BC троугла у тачки D. Ако са x означимо дужину дужи CD, онда је $BD = \sqrt{2} - x$. Применом теореме о симетрали унутрашњег угла троугла добијамо $CD : DB = AC : AB$, тј. $x : (\sqrt{2} - x) = \sqrt{2} : 2$. Одаве је $x = 2 - \sqrt{2}$.

На основу Питагорине теореме примењене на правоугли троугао ADC имамо $AD^2 = AC^2 + CD^2 = (\sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{2})^2$, одакле је $AD = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Сада из правоуглог троугла ADC добијамо редом:

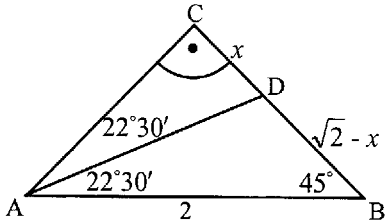
$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{CD}{AD} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

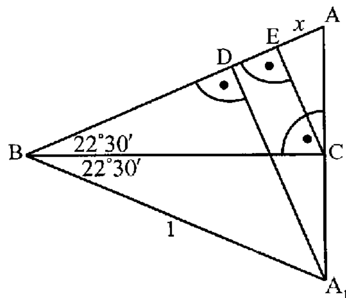
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{CD}{AC} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} = \frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

Решење 2. У троуглу ABC је $AB = 1$, $BC > AC$, $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle CBA = 22^\circ 30'$ (сл. 2). Одредимо тачку A_1 симетричну тачки A у односу на праву BC. Висина $CE = h$ троугла ABC уједно је и средња линија троугла ADA_1 ($A_1D \perp AB$, $D \in AB$). Због тога је $A_1D = 2 \cdot CE = 2h$. Правоугли троугао DBA_1 је једнакокрак ($\angle BA_1D = \angle A_1BD = 45^\circ$), па је $A_1D = BD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, односно $2h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тј. $h = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Троуглови BCE и ACE су слични, па је $CE : AE = BE : CE$,



Сл. 1



Сл. 2

односно $CE^2 = AE \cdot BE$. Ако означимо $AE = x$, имамо $BE = 1 - x$. Сада је $CE^2 = h^2 = x(1-x)$, односно $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = x - x^2$, тј. $x^2 - x + \dfrac{1}{8} = 0$. Решавањем ове једначине добијамо $x = \dfrac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ и $1 - x = \dfrac{1}{4}(2+\sqrt{2})$.

Применом Питагорине теореме на правоугли троугао BCE добијамо

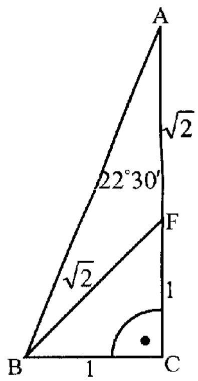
$$BC^2 = BE^2 + CE^2 = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}).$$

Сада из правоуглог троугла ABC имамо $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 1^2 - \dfrac{1}{4}(2+\sqrt{2}) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, па је $AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Најзад,

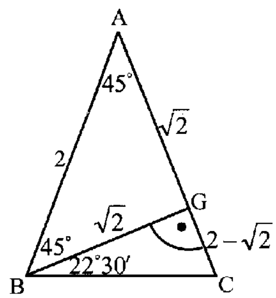
$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{8} &= \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\\
\cos\frac{\pi}{8} &= \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\\
\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} &= \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1,\\
\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} &= \frac{BC}{AC} = \sqrt{2}+1.
\end{aligned}$$

Решење 3. Нека је троугао ABC правоугли ($\angle BCA = 90^\circ$), тако да је $BC = 1$ и $\angle BAC = 22^\circ 30'$ (сл. 3). На катети AC одредимо тачку F тако да је $\angle ABF = 22^\circ 30'$. Троуглови BCF и BFA су једнакокраки ($\angle CFB = \angle CBF = 45^\circ$ и $\angle BAF = \angle ABF = 22^\circ 30'$), па је $CF = BC = 1$ и $BF = AF = \sqrt{2}$. Тада је $AC = CF + FA = 1 + \sqrt{2}$.

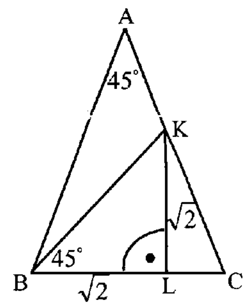
Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ABC добијамо $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 1^2 + (1+\sqrt{2})^2$, па је $AB = \sqrt{2(2+\sqrt{2})}$. Најзад, из торугла ABC добијамо вредности за $\sin\dfrac{\pi}{8}$, $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8}$.



Сл. 3



Сл. 4



Сл. 5

Решење 4. Нека је $\triangle ABC$ једнакокрак, тако да је $AB = AC = 2$ и $\angle BAC = 45^\circ$ (сл. 4). На краку AC одредимо тачку G тако да буде $\angle ABG = 45^\circ$. Троугао ABG је једнакокрак и правоугли, па је $AG = BG = \sqrt{2}$. Применом Питагорине теореме на правоугли троугао BCG добијамо $BC^2 = BG^2 + CG^2 = (\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2$, одакле је $BC = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Сада из $\triangle BCG$ лако добијамо вредности тригонометријских функција од $\dfrac{\pi}{8}$. Довршите!

Решење 5. Нека је ABC једнакокраки троугао код кога је: угао при врху A једнак 45° и основица $BC = 2$ (сл. 5). На краку AC одредимо тачку K тако да је $\angle KBC = 45^\circ$. Троугао BCK је једнакоркак ($\angle BKC = \angle BCK = 67^\circ 30'$), па је $BK = 2$. Ако је $KL \perp BC$, $L \in BC$, онда је $\triangle BLK$ правоугли и једнакокрак. Тада је $KL = BL = \sqrt{2}$ и $CL = 2-\sqrt{2}$.

Применом Питагорине теореме на правоугли троугао CKL је $CK^2 = KL^2 + CL^2 = (\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2$, а одавде $CK = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Како је $\angle CDL = 22^\circ 30' = \dfrac{\pi}{8}$, имамо

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{CL}{CK} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Остале вредности тригонометријских функција од $\dfrac{\pi}{8}$ лако се добијају.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ђ. Дугошија, Ж. Ивановић, Л. Милин, *Тригонометрија*, уџбеник са збирком задатака за II разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 1999.

17. НОУ дивизије 43, Горњи Милановац

173. улица бр. 19/4, Јагодина