Др Ђоко Г. Марковић

АНТИЧКО РЕШАВАЊЕ ЛИНЕАРНИХ И КВАДРАТНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРИКАЗАНО САВРЕМЕНИМ МАТЕМАТИЧКИМ ЈЕЗИКОМ

Ахмесов папирус (познатији под називом Риндов папирус), написан око 1800. г. пне, један је од најстаријих споменика људске културе. Ево малог исечка тог дешифрованог текста: „Поука, како постићи знања свих нејасних (тешких) ствари … свих тајни које у себи скривају ствари … писац Ахмес написао је ово … из старих рукописа … “

Ахмесов папирус садржи низ задатака, које савремена математика решава помоћу једначина првог степена. Њихов аутор их решава начином који ће током више миленијума представљати главни поступак за решавање сличних задатака, тзв. „методом лажног положаја“. Египћани су тада имали за обележавање непознате посебан знак и назив, последње се изговара „хуа“ или „аха“ и преводи се речју „гомила“.

У Ахмесовом папирусу наводи се пример:

„Гомила. Њен седми део, она цела. Да чини 19.“

Ово значи да треба решити једначину $x+\dfrac{x}{7}=19$. Решење је $x=16\dfrac{5}{8}$.

Суштина Ахмесовог решавања је у следећем: Он је рачунао са разломцима као са природним бројевима, тј. претпоставио је да је „гомила“ – 7; тада ће $\dfrac{1}{7}$ „гомиле“ бити 1 (као једно цело). При учињеној претпоставци би се десна страна једначине коју решавамо изједначила са левом, тј. са осам $(7+1)$. Осам је мањи од броја 19 траженог у задатку. Ахмес у мислима удвостручава тај број и добија број 16. Следеће удвостручење дало би 32, али тај број премашује задати број 19 и у решењу он, због тога, звездицом обележава број 16, као онај део који треба да уђе у решење. Још недостаје $19-16=3$. Ахмес зато узима $\dfrac{1}{2}$ од 8, тј. 4. Овај део предложеног броја не може да уђе у тражено решење, јер треба додати само 3. Тада он решава задатак узимајући $\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{1}{8}$ од 8, тј. 2 и 1, који када се саберу са 16 дају 19. На овај начин Ахмес је установио да првобитно постављено значење за „гомилу“– 7 треба узети $2+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}$ пута, да би се задовољио услов задатка. Дакле, решење је

$$x=7\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=7\cdot\frac{16+2+1}{8}=\frac{133}{8}=16\frac{5}{8}.$$

Језиком савремене математике Ахмесова прича, којом он 1800 г. пне. каже да само преноси, тј. преписује запис са једног много старијег папируса из времена око 4000. г. пне, могла би изгледати овако:

$$
\begin{aligned}
x + \frac{x}{7} = 19 \iff 7 \cdot x + x = 7 \cdot 19 \iff 8x = 7(2 \cdot 8 + 2 + 1) \\
\iff 8 \cdot x = 8 \cdot 7 \cdot \left(2 + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}\right) \iff x = 7 \cdot \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \\
\iff x = \frac{133}{8} \iff x = 16\frac{5}{8}.
\end{aligned}
$$

Пример 1. Ахмесовим методом, прилагођеном језику савремене математике, решити једначину $x + \dfrac{x}{9} = 37$.

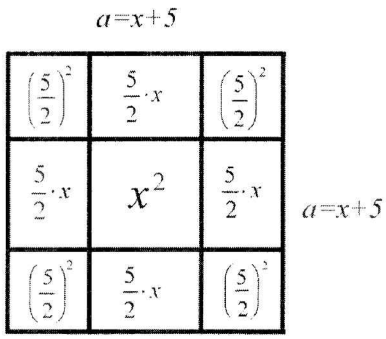
Решење. $x + \dfrac{x}{9} = 37 \iff x = 9 \cdot \left(3 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5}\right)$.

Једначине другог степена знали су да решавају још Вавилонци око 2000. г. пне. Грчки математичари решавали су квадратне једначине геометријски. Код Еуклида то решавање се изводи дељењем дужи на аритметичку и геометријску средину. Код Херона и Диофанта срећемо методе решавања које се по суштини у много чему подударају са нашим методама. Индијски и кинески математичари посматрају и негативне корене квадратне једначине у првим вековима наше ере. Познати индијски математичар Басхара у XII веку примећује како људи негативне корене не одобравају.

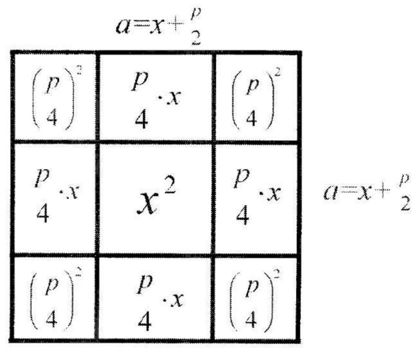
Арапском математичару **ал-Хорезмију** дугујемо захвалност за даљи значајан искорак при решавању квадратних једначина. Он даје поступак за извођење формуле за решавање квадратне једначине које и данас срећемо у неким уџбеницима. Конкретно, он решава једначину $x^2 + 10 \cdot x = 39$. Узима да је x страница квадрата, и конструише над сваком од његових страница правоугаонике са ширином која је једнака четвртини коефицијента другог члана једначине, тј. $\dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$ (слика 1). Површина та четири правоугаонока је $4 \cdot \dfrac{5}{2} \cdot x = 10 \cdot x$. Површина фигуре у облику крста једнака је $x^2 + 10 \cdot x$, односно левој страни дате једначине. Допунимо ову фигуру на угловима помоћу четири квадрата до квадрата странице $x + 5$. Површина добијеног квадрата је $a^2 = (x+5)^2$. Тај квадрат смо добили тако што смо фигури у облику крста површине $x^2 + 10 \cdot x$ додали четири подударна квадрата на угловима, при чему је њихова страница $\dfrac{5}{2}$, а површина $4 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 25$.

Дакле, имамо

$$
\begin{aligned}
(x+5)^2 = 39 + 25 \iff (x+5)^2 = 64 \iff x + 5 = 8 \vee x + 5 = -8 \\
\iff x = 3 \vee x = -13.
\end{aligned}
$$



Сл. 1



Сл. 2

Погледајмо како све то изгледа у општем случају једначине $x^2+p\cdot x=q$. Узмимо да је x страница квадрата, и конструишимо над сваком од његових страница правоугаонике са ширином која је једнака четвртини коефицијента другог члана једначине, тј. $\dfrac{p}{4}$ (слика 2). Површина та четири правоугаонока је $4\cdot\dfrac{p}{4}\cdot x=p\cdot x$. Површина фигуре у облику крста једнака је $x^2+p\cdot x$, односно левој страни дате једначине. Допунимо ову фигуру на угловима помоћу четири квадрата до квадрата странице $x+\dfrac{p}{2}$. Површина добијеног квадрата је $a^2=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2$. Тај квадрат смо добили тако што смо фигури у облику крста површине $x^2+p\cdot x$ додали четири подударна квадрата на угловима, при чему је њихова страница $\dfrac{p}{4}$, а површина $4\cdot\left(\dfrac{p}{4}\right)^2=\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$. Дакле, имамо

$$
\begin{aligned}
x^2+p\cdot x=q &\iff \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=q+\left(\frac{p}{2}\right)^2\\
&\iff x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}\vee x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q},
\end{aligned}
$$

па је $x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+q}$.

Ово су били примери примене раритетних реконструкција у настави математике. Јасно је да овакве реконструкције богате наставу и веома су употребљиви као катализациони чиниоци у функцији активизирања и динамизирања наставе математике основне и средње школе, тј. у функцији разбијања формализма у њој.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическое просвещение, (Третья серия), Издательство МЦНИО, Москва, 2004.
2. Д.Ј. Стројк, *Кратак преглед историје математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1991.
3. Ђ.Г. Марковић, *Математика (Основни елементи)*, „Унирекс“ Подгорица и „Јаникс“ Београд, Подгорица, 2011.

E-mail: djokogm@hotmail.com