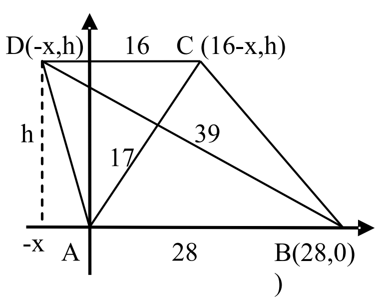
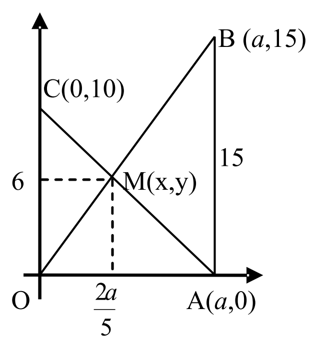
Милорад Шуковић

МЕТОДА КООРДИНАТА

Метода координата или, сликовитије, употреба правоуглог координатног система је основна и природна метода истраживања и решавања проблема у аналитичкој геометрији. Примењује се како у неким областима геометрије тако и у другим математичким дисциплинама. У настави математке, то су најчешће задаци који се могу решити на више начина. Илуструјемо примену методе у планиметрији где она даје релативно једноставнија решења док и у неким проблемским задацима долазимо до потпунијег и садржајнијег решења, али водећи рачуна о садржајима везаним за област „Правоугли координатни систем“ који су познати ученицима основне школе (растојање тачака, график линеарне функције који садржи две задате тачке, ...). Основно питање је како најповољније поставити координатни систем. Обично се за центар координатног система одабере нека истакнута тачка посматране фигуре (теме, средиште странице, тежиште, ортоцентар, пресек дијагонала). За бар једну координатну осу бира се правац на којем лежи неки истакнути елемент фигуре, тако да тачке фигуре добију једноставне координате, што се одражава на једначине правих и једноставније израчунавање тражене величине или доказивање постављеног тврђења.



Слика 1



Слика 2

1. Израчунати дужину висине трапеза ако су дужине основица 28 cm и 16 cm, а дужине дијагонала 17 cm и 39 cm.

Саопштено на Републичком семинару о настави математике, Крагујевац, јануара 2012.

Решење. Поставимо правоугли координатни систем са почетком у темену A (сл. 1). Како је $|BD| = 39$, то је $(28+x)^2 + h^2 = 39^2$. Такође, из $|AC| = 17$ добијамо $(16-x)^2 + h^2 = 17^2$. Одатле редом добијамо

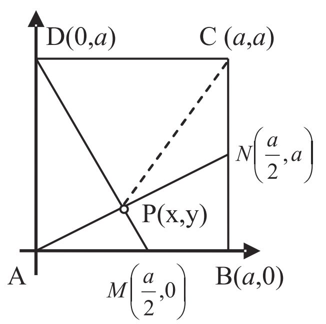
$$(28+x)^2 - (16-x)^2 = 39^2 - 17^2,$$
$$88(6+x) = 14 \cdot 88,$$
$$x = 8,$$
$$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$$

2. На равној подлози су два стуба висине 10 m и 15 m. Врх сваког стуба спојен је правом са подножјем другог стуба. На којој је висини пресечна тачка правих?

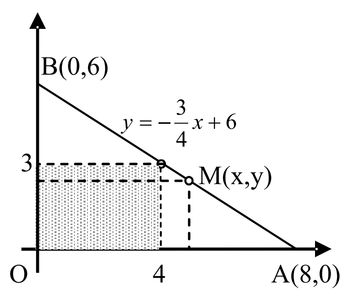
Решење. Нека је растојање између подножја ових стубова једнако a. Правоугли координатни систем бирамо тако да му је почетак O подножје првог стуба (сл. 2). Права OB има једначину $y = \dfrac{15}{a}\,x$, а права CA једначину $y = -\dfrac{10}{a}\,x + 10$. Апсцису пресечне тачке M добијамо решавањем једначине

$$\frac{15}{a}\,x = -\frac{10}{a}\,x + 10.$$

и она је $x = \dfrac{2a}{5}$. Замењујући у било коју од једначина правих, добијамо ординату пресечне тачке $y = 6$. Дакле, тражена висина пресечне тачке је 6 m (независно од тога колико је растојање између стубова).



Слика 3



Слика 4

3. Тачке M и N су средишта страница AB и BC квадрата $ABCD$. Дужи AN и DM секу се у тачки P. Доказати да је дуж PC једнака страници квадрата.

Решење. Нека је дужина странице квадрата једнака a. Координатни систем постављамо са почетком у тачки A, координате тачака су дате на слици 3. Једначине правих AN и DM су, редом, $y = \dfrac{1}{2}\,x$ и $y = -2x + a$. Њихова пресечна тачка P има координате $x = \dfrac{2a}{5}$ (што добијамо решавањем једначине $\dfrac{1}{2}\,x = -2x + a$) и

$y = \dfrac{a}{5}$. Дакле, дужина дужи PC је

$$\sqrt{\left(a - \frac{2a}{5}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{5}\right)^2} = a,$$

а то је и требало доказати.

4. Из тачке M на хипотенузи правоуглог троугла спуштене су нормале на обе катете. Одреди положај тачке M тако да добијени правоугаоник има највећу могућу површину. (Хипотенуза $AB = 10\,\mathrm{cm}$, катете $8\,\mathrm{cm}$ и $6\,\mathrm{cm}$).

Решење. Ако поставимо координатни систем са почетком у темену правог угла (сл. 4), тада је $A(8,0)$ и $B(0,6)$. Једначина праве AB је $y = -\dfrac{3}{4}x + 6$. Нека је $M(x,y)$ произвољна тачка хипотенузе. Тада је површина правоугаоника

$$\begin{aligned} P(x) = x \cdot y = x \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 6\right) &= -\frac{3}{4}x^2 + 6x \\ = -\frac{3}{4}(x^2 - 8x + 16 - 16) &= -\frac{3}{4}\big((x-4)^2 - 16\big). \end{aligned}$$

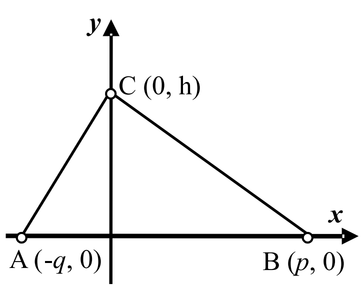
Добијени израз достиже највећу вредност за $x = 4$ и она износи 12. Дакле, странице траженог правоугаоника су $4\,\mathrm{cm}$ и $3\,\mathrm{cm}$.

5. Висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла је геометријска средина одсечака на њој. Доказати.

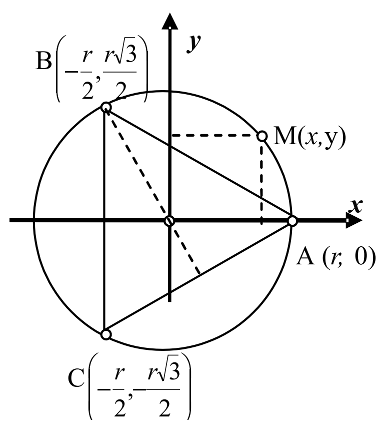
Решење. Одаберемо ли за координатни систем подножје висине која одговара хипотенузи $\triangle ABC$, темена троугла добијају следеће координате: $A(-q,0)$, $B(p,0)$, $C(0,h)$ (сл. 5). Полазећи од услова задатка $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$, добијамо

$$[(0+q)^2 + (h-0)^2] + [(0-p)^2 + (h-0)^2] = (p+q)^2,$$

а одатле $q^2 + h^2 + p^2 + h^2 = p^2 + 2pq + q^2$, односно $2h^2 = 2pq$ и $h = \sqrt{pq}$, а то је требало доказати.



Слика 5



Слика 6

6. Збир квадрата удаљености било које тачке M кружнице $K(O,r)$ од темена једнакостраничног троугла ABC уписаног у ту кружницу је константна величина.

Решење. Одаберемо ли за координатни почетак центар дате кружнице, а x-осу поставимо тако да јој припада тачка A, за координате темена троугла добијамо величине дате на слици 6. Ако тачка M са кружнице има координате (x,y), тада је:

$$|AM| = (x-r)^2 + y^2,$$

$$|BM|2 = \left(x+\frac{r}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$|CM|2 = \left(x+\frac{r}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 = 3(x^2+y^2) + 3r^2 = 3r^2 + 3r^2 = 6r^2.$$

Дакле, тражени збир квадрата не зависи од положаја тачке M.

ОШ „Свети Сава“, Аранђеловац
E-mail: sukiaca@sezampro.rs