Златко Удовичић

О ИРАЦИОНАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА

(Математика није игра симболима)

Прије неколико година, на једном семинару за наставнике математике у основним и средњим школама, старији колега ми је поставио интересантно питање које ме је инспирисало да напишем овај чланак. Колегино име не спомињем због тога што је и након нашег разговора остао у дилеми. Недуго након семинара колега је, на жалост, преминуо, али вјерујем да ће овај чланак отклонити евентуалне забуне код оних који се сретну са сличним проблемом.

1. Увод

Ирационалне једначине представљају једну од „тврђих" тема које се обрађују у средњој школи (обично у другом разреду, након што се обради квадратна једначина). Питање које ми је поставио поменути колега односило се управо на ирационалне једначине.

Да ли је број -2 рјешење једначине

(1) $$\sqrt{x^2+4x+3}=\sqrt{5x+9}\,?$$

Свакако, у изворном разговору није било конкретне једначине какву наводим у тексту, али је суштина проблема била у томе да се уврштавањем броја -2 у лијеву и десну страну задане једначине добија „једнакост" $\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$. Разлог због којег ријеч једнакост стављам под наводнике сакривен је већ у другом дијелу наслова, а детаљно ће бити аргументован у даљем тексту. Тврђење да број -2 јесте рјешење задане једначине колега је базирао на чињеници да су се ученици већ упознали са комплексним бројевима (који се дјелимично обраде непосредно прије квадратне једначине), па симбол $\sqrt{-1}$ има смисла. Зашто онда, број -2 није рјешење постављене једначине? Сигурно да моја објашњења нису била довољно јасна, јер нисам успио да колеги докажем да гријеши, па ћу у овом чланку покушати да то урадим на бољи начин.

Посматрајмо сада другу ирационалну једначину (из [1], задатак 363д))

(2) $$\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1.$$

Постављена једначина има смисла за $x\in[\frac{3}{2},+\infty)$. Трансформацијом једначине се добија

$$2\sqrt{2x-3}=-x+4,$$

а ова једначина има смисла за $x \in (-\infty, 4]$, што значи да постављена једначина има смисла за $x \in [\frac{3}{2}, 4]$. Посљедња једначина се даље трансформише у једначину

$$x^2 - 16x + 28 = 0,$$

чија су рјешења $x_1 = 2$ и $x_2 = 14$. Друго рјешење се одбацује, па једначина (2) има тачно једно рјешење.

Алтернативни поступак рјешавања ирационалних једначина дозвољава да се занемаре сва ограничења која се постављају на непознату и само спроведе формални рачун. Након тога се добијена рјешења уврштавају у постављену једначину и одбацују она која је не задовољавају. У случају једначине (2) формалним рачуном се поново добијају рјешења $x_1 = 2$ и $x_2 = 14$. Уврштавањем првог рјешења у постављену једначину се добија

$$\sqrt{2+2} - \sqrt{1} = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1,$$

што значи да $x_1 = 2$ јесте рјешење једначине (2), док се уврштавањем другог рјешења добија

$$\sqrt{14+2} - \sqrt{28-3} = \sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1,$$

па $x_1 = 14$ није рјешење једначине (2). Дакле, једначина (2) има само једно рјешење $x = 2$ и сигуран сам да ће се сви читаоци сложити са овим. У чему је онда проблем са једначином (1)? Мишљења сам да проблем лежи у интуитивном схватању појма једначине. Наиме, са једначинама се срећемо на самом почетку математичког образовања, колико ме памћење служи, можда већ и у првом разреду основне школе. Тада интуитивно прихватамо појам једначине и тешко се одричемо ове интуиције која у неким, срећом не баш честим, ситуацијама може изазвати неспоразуме.

2. Веза функција–једначина

Одговор на питање о рјешењима једначине (1) захтијева прецизније увођење појма једначине. Нека је, дакле, задана функција $f\colon X \to Y$ и нека је $b \in Y$. Једначина

$$f(x) = b \tag{3}$$

је предикат P (дужине један) дефинисан на скупу X помоћу

$$P(x): \quad f(x) = b.$$

Подсјетимо се да је предикат (дужине један) функција, дефинисана на неком скупу, која елементима тог скупа придружује тачно једну од двије могуће вриједности $\top$ или $\bot$. Елемент $a \in X$ је рјешење једначине (3) ако и само ако је $f(a) = b$, тј. ако и само ако је $P(a) = \top$. Неформално, $a \in X$ је рјешење једначине (3) ако и само ако a задовољава једначину (3). Рјешавање једначине је поступак којим се одређују сва њена рјешења или се доказује да једначина нема рјешења, уколико их заиста нема.

Дакле, увођење једначине заснива се на два појма: појму предиката и појму функције. Свакако, приликом прецизнијег увођења појма једначине (нпр. у првом разреду средње школе) помињање предиката треба елегантно избјећи (што не представља проблем), али појам функције треба обавезно нагласити.

Аналогно, ако су $f, g\colon X \to Y$ уводи се и једначина

$$f(x) = g(x).$$

Ако скуп Y има структуру групе (једна операција, неутрални елемент операције и сваки елемент има инверзни у односу на операцију), онда нема потребе да се претходна једначина посебно наглашава.

Размотримо сада један интересантан

Примјер 1. Нека су на скупу $\{a, b, c, d\}$ дефинисане функције f и g помоћу

$$f : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad g : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

и нека је на скупу $\{a, b, c\}$ дефинисана функција H помоћу

$$H : \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Ријешити једначине:

1. $f(x) = g(x)$ и
2. $H\left(f(x)\right) = H\left(g(x)\right)$.

Очигледно, прва једначина има два рјешења $x_1 = b$ и $x_2 = d$. Другој једначини треба посветити мало више пажње. Она има само једно рјешење $x = b$. Друго рјешење прве једначине, $x_2 = d$, одбације се зато што аргумент функције H уопште не може бити d. Симболички, „једнакост“ $H(d) = H(d)$ јесте тачна, али суштински она уопште нема смисла, као што нема смисла ни „једнакост“ $H(\clubsuit) = H(\clubsuit)$, јер аргумент функције H не може бити ништа осим елемената a, b или c.

На крају овог одјељка нагласићу да приликом рјешавања једначине (2) нисам користио синтагму „област дефинисаности једначине“ иако се и она може користити будући да је једначина предикат, а предикат је функција. Ипак, ако се приликом увођења појма једначине не користи појам предиката, онда ова синтагма нема смисла (појам „област дефинисаности“ се односи на функције, а не на једначине). Али, управо ова синтагма истиче дубоку везу између функције и одговарајуће једначине, будући да се „област дефинисаности једначине“ поистовјећује са облашћу дефинисаности одговарајуће функције.

3. Закључак

Вратимо се сада једначини (1). Есенцијални детаљ приликом њеног рјешавања представља симбол $\sqrt{\cdot}$ и одговор на постављено питање треба тражити управо у исправном схватању овог симбола. Код ирационалних једначина симбол $\sqrt{\cdot}$ означава функцију која интервал $[0, +\infty)$ пресликава на себе, при чему $\sqrt{a}$, $a \geq 0$, означава позитиван број b такав да је $b^2 = a$. Уврштавањем броја -2 у једначину (1) добија се само симболички запис $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ који, према претходно реченом, уопште нема смисла, као што ни симболички запис $H(\clubsuit) = H(\clubsuit)$ у наведеном примјеру није имао смисла.

Дакле, број -2 није рјешење једначине (1).

Најзад, рећи ћу још неколико ријечи о симболу који је направио забуну. Увођењем комплексних бројева симбол $\sqrt{\cdot}$ добија сасвим другачији смисао. Прецизније, сада $\sqrt{a}$, при чему a може бити било који комплексан број, означава два комплексна броја чији су квадрати једнаки броју a. У том контексту, симболички запис $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ може, а не мора бити тачан. Будући да постоје два комплексна броја чији је квадрат једнак -1 (наравно, $\pm i$), зависно од тога који од ова два броја је означен симболом $\sqrt{-1}$, добијају се четири тврђења: $i = i$, $i = -i$, $-i = i$ или $-i = -i$, од којих су два тачна, а два нетачна. Заправо, у скупу комплексних бројева симбол $\sqrt{\cdot}$ не означава функцију (функција сваком елементу домена придружује тачно један елемент кодомена), па у том случају уопште нема смисла постављати ирационалне једначине. Једначина (2), чије рјешавање сигуран сам не прави забуне, лијепо илуструје какви превиди могу настати ако се квадратни коријен не посматра као функција, него као симбол за два броја. Као што је већ урађено, формалним рјешавањем једначине (2) добијају се два потенцијална рјешења чије уврштавање у једначину, при чему је квадратни коријен симбол за два броја, а не функција, даје читаву лепезу резултата који су дати у двије наредне табеле.

- $x = 2$

$\sqrt{x+2}$	$\sqrt{2x-3}$	$\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3}$
2	1	1
2	-1	3
-2	1	-3
-2	-1	-1

  Очигледно, једна од четири могућности задовољава једначину (2).

- $x = 14$

$\sqrt{x+2}$	$\sqrt{2x-3}$	$\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3}$
4	5	-1
4	-5	9
-4	5	-9
-4	-5	1

  Поново једна од четири могућности задовољава једначину (2), али се потенцијално рјешење 14 одбацује зато што је у оваквим случајевима лакше исправно разумијети симбол $\sqrt{\cdot}$ (као позитиван број чији је квадрат једнак броју испод квадратног коријена).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивановић, Ж, Огњановић, С, *Математика 2, збирка задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа*, Осмо, исправљено и допуњено издање, Круг, Београд, 1999.

Природно-математички факултет, Одсјек за математику, Змаја од Босне 35, 71000 Сарајево, Босна и Херцеговина

E-mail: zzlatko@pmf.unsa.ba