Јожеф Б Варга

О КРИТЕРИЈУМИМА ДЕЉИВОСТИ

Час додатне наставе у петом разреду основне школе

У петом разреду се уче критеријуми дељивости, тј. како се на основу цифара неког броја може сазнати да ли је тај борј дељив неким другим бројем. Тако смо научили да је број дељив са два ако му је последња цифра парна, да је неки број дељив са 5 ако му је последња цифра 0 или 5, да је дељив са 3 ако му је збир цифара дељив са 3 итд. На овом часу видећемо неке занимљиве критеријуме дељивости који се не уче на редовним часовима, а могу бити од користи.

Прво да погледамо како смо дошли до горе поменутих критеријума дељивости. У даљим разматрањима користићемо следећа два правила:

1) *Ако бројеви a и b при дељењу бројем c дају остатке, редом, d и e, тада бројеви $a+b$ и $d+e$ дају једнаке остатке при дељењу са c.*

2) *Ако бројеви a и b при дељењу бројем c дају остатке, редом, d и e, тада бројеви $a \cdot b$ и $d \cdot e$ дају једнаке остатке при дељењу са c.*

Знамо да се сваки број може представити као збир неких сабирака, од којих је сваки производ једне цифре и декадне јединице, при чему се било која декадна јединица појављује највише једном. Тако, на пример:

$$820584 = 8 \cdot 100000 + 2 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 1.$$

Посматрајмо сада бројеве 10, 100, 1000, ... Сваки од њих је дељив са 2, тј. при дељењу са 2 сваки од њих даје остатак 0. Значи, број 820584 при дељењу са 2 даће исти остатак као и број $8 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$, тј. као последња цифра датог броја. Ово значи да једина цифра која може утицати на дељивост са 2 јесте последња цифра броја. С обзиром да је, у наведеном примеру, последња цифра броја једнака 4, а она даје остатак 0 при дељењу са 2, следи да је дати број дељив са 2.

Какав је случај при дељењу са 3? Остатак сваког броја 1, 10, 100, 1000, ... при дељењу са 3 је 1. Значи да број 820584 при дељењу са 3 даје остатак једнак остатку броја $8 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1$ при дељењу са 3. Приметимо да је

$$8 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = (8 + 2 + 0 + 5 + 8 + 4) \cdot 1,$$

а то је у суштини збир цифара броја 820584. Како је овај збир једнак 27 и дељив је са 3, то је и дати број дељив са 3.

Учили смо и то да је неки број дељив са 4 ако је број формиран од последње две цифре дељив са 4. Па, делимо поново бројеве 1, 10, 100, 1000, ... са 4. Добијамо остатке, редом, 1, 2, 0, и даље стално 0. Из овога закључујемо да дељивост неог броја са 4 зависи само од последње две цифре тог броја. Лако се доказује и да је остатак при дељењу неког броја са 4 једнак остатку при дељењу са 4 двоцифреног завршетка датог броја.

Слично се добијају критеријуми дељивости бројевима 8, 16, 32, ... , као и са 25, 125 итд.

Погледајмо, на пример, да ли је наш број 820584 дељив са 8, односно 16! Формирајмо бројеве од последње три, односно четири цифре. То је у оба случаја број 584. Лакше је одредити да ли је број 584 дељив са 8, односно 16, него број 820584 делити тим бројевима, мада ни то није сасвим очигледно. Ако пак посматрамо остатке бројева 1, 10, 100, 1000, ... при дељењу са 8, видећемо да су то бројеви 1, 2, 4, 0 и даље 0. Према томе, број 584 даје исти остатак при дељењу са 8 као и број $5 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 1$. То већ лако израчунамо напамет. Добијамо број 40 који је дељив са 16, па је и број 584, а са њим и 820584 дељив са 8.

За одређивање остатака при дељењу са 16, односно за испитивање дељивости са 16, последње четири цифре треба множити, редом, са 8, 4, 10 и 1, тј. рачунамо број $0 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 1$. Добијени број је 104. С њим можемо поновити поступак, па добијемо $0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 8$. Како 8 није дељиво са 16, то ни полазни број 820584 није дељив са 16. Код овог поступка можемо приметити и то да уместо низа бројева 8, 4, 10, 1 за дељивост са 16 можемо користити и низ 8, 4, -6, 1 (зашто?).

На сличан начин можемо добити критеријуме дељивости било којим природним бројем. Можемо приметити да је у многим случајевима коришћење таквих критеријума сложеније него извршити само дељење, но за оне једноставније вреди користити критеријум.

Наводимо сада четири критеријума који се могу добити на описани начин.

1) *Природни број n је дељив са 7 ако је дељив са 7 број који се добија на следећи начин: цифре броја n, почевши од последње, редом множимо са $1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, \ldots$ (уочава се понављање) и производе саберемо. Збир даје исти остатак при дељењу са 7 као и број n.* У нашем горњем примеру за број 820584 добијамо:

$$8 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -16 - 6 + 10 + 24 + 4 = 16.$$

Број 16 даје остатак 2 при дељењу са 7, па значи да и 820584 даје остатак 2 при дељењу са 7, тј. није дељив са 7.

2) *Природни број n је дељив са 11 ако је дељив са 11 број који се добија на следећи начин: цифре броја n, почевши од последње, редом множимо са $1, -1, 1, -1, \ldots$ (уочава се понављање) и производе саберемо. Збир даје исти*

остатак при дељењу са 11 *као и број* n. У нашем горњем примеру за број 820584 добијамо:

$$8 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = -8 + 2 + 5 - 8 + 4 = -5.$$

Број -5 није дељив са 11 (остатак је 6), па значи да ни 820584 није дељив са 11, већ даје остатак 6.

Правило за одређивање да ли је неки број дељив са 11 можемо преформулисати овако:

Саберемо све цифре на парним, као и све цифре на непарним местима броја n *и формирамо разлику та два збира. Ако је разлика дељива са* 11, *тада је и полазни број* n *дељив са* 11. У нашем примеру $8 + 0 + 8 - (2 + 5 + 4) = 16 - 11 = 5$ није дељиво са 11.

3) *Природни број* n *је дељив са* 13 *ако је дељив са* 13 *број који се добија на следећи начин: цифре броја* n, *почевши од последње, редом множимо са* $1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, -3, -4, -1, 3, 4, \ldots$ *(уочава се понављање) и производе саберемо. Збир даје исти остатак при дељењу са* 13 *као и број* n. У нашем горњем примеру за број 820584 добијамо:

$$8 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 5 \cdot (-4) + 8 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = 32 + 6 - 20 - 24 + 4 = -2.$$

Број -2 није дељив са 13 (остатак је 11), па значи да ни 820584 није дељив са 13, већ даје остатак 11.

4) *Природни број* n *је дељив са* 101 *ако је дељив са* 101 *број који се добија на следећи начин: цифре броја* n, *почевши од последње, редом множимо са* $1, 10, -1, -10, 1, 10, -1, -10, \ldots$ *(уочава се понављање) и производе саберемо. Збир даје исти остатак при дељењу са* 101 *као и број* n. У нашем горњем примеру за број 820584 добијамо:

$$8 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-10) + 5 \cdot (-1) + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 80 + 2 - 5 + 80 + 4 = 161.$$

Број 161 није дељив са 101 (остатак је 60), па значи да ни 820584 није дељив са 101, већ даје остатак 60.

Задаци

1. Како можемо установити да ли је неки број дељив са 15, 36?
2. Пронаћи поступак за добијање критеријума дељивости са 99, 999, 9999, 111 и 1111.
3. Како можемо препознати бројеве дељиве са 27, 121?

ОШ „Петар Кочић“, Темерин
E-mail: broj@parabolanet.com