Душан Ј. Симјановић, Ненад О. Весић

ЗАНИМЉИВИ АЛГЕБАРСКИ ЗАДАЦИ СА БРОЈЕМ 2012

Циљ овог чланка је решавање неких занимљивих Диофантових једначина у којима се појављује број 2012. Као почетне, бирамо једначине у следећа четири задатка.

Задатак 1. На колико начина је број 2012 могуће представити као збир природних бројева чији је производ једнак 2012?

Решење. Познато је да је

$$2012 = 2^2 \cdot 503.$$

Како је $2012 = 2012$, број 2012 смо представили као „збир“ и „производ“ једног броја и то броја 2012. За овакво представљање броја 2012 постоји један начин.

Друга врста оваквог представљања броја 2012 јесте произвољна пермутација 1507-орке природних бројева $(4, 503, \underbrace{1, \dots, 1}_{1505})$. Број 2012 је овако могуће представити на

$$\frac{1507!}{1505!} = 2 \cdot \frac{1507!}{2! \cdot 1505!} = 2 \cdot \binom{1507}{2}$$

начина.

Трећи начин оваквог представљања броја 2012 јесте помоћу произвољне пермутације 1508-торке $(2, 2, 503, \underbrace{1, \dots, 1}_{1505})$ Оваквих представљања броја 2012 има

$$\frac{1508!}{2! \cdot 1505!} = 1508 \cdot \frac{1507!}{2! \cdot 1505!} = 1508 \cdot \binom{1507}{2}.$$

Како су бројеви 2 и 503 прости, претходни начини су и сви могући начини представљања броја 2012 као збира природних бројева чији је производ једнак 2012. Број 2012 је могуће представити као збир природних бројева чији је производ једнак 2012 на укупно

$$1 + 2 \cdot \binom{1507}{2} + 1508 \cdot \binom{1507}{2} = 1 + 1509 \cdot \binom{1507}{2} \text{ начина.}$$

Следећи задатак се бави представљањем броја 2012 у облику збира узастопних природних бројева.

Задатак 2. На колико начина је број 2012 могуће представити као збир k узастопних природних бројева $k \geq 2$?

Решење. Нека су k и m природни бројеви и нека је

$$2012 = k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+m-1).$$

Из претходне једнакости следи да је

$$2012 = \underbrace{k + \ldots + k}_{m \text{ пута}} + 1 + 2 + \cdots + (m-1) = k \cdot m + \frac{(m-1)\cdot m}{2} = m \cdot (2 \cdot k - 1 + m).$$

Природни бројеви m и $(2k-1)+m$ су различите парности. Заиста, уколико је број m паран, број $2k-1+m$ је непаран а ако је број m непаран, број $2k-1+m$ је паран.

Коначно, из $2012 = km + \dfrac{(m-1)m}{2}$ је

$$4024 = m \cdot (2k - 1 + m),$$

па из неједнакости $m \leqslant 2k-1+m$ и растављања $4024 = 8 \cdot 503$, а како је 503 прост број, следи да је $m = 8$ и $k = 248$, тј.

$$2012 = 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255.$$

Због јединствености бројева k и m, претходно представљање броја 2012 помоћу збира узастопних природних бројева је јединствено.

У наредном задатку израчунавамо вредност одређеног рационалног алгебарског израза.

Задатак 3. Ако је $x^2 + x + 1 = 0$, одредити вредност израза

$$M(x) = x^{-2012} + x^{-2011} + x^{2011} + x^{2012}.$$

Решење. Из једнакости $x^2 + x + 1 = 0$ следи да је

$$x^2 + x = -1 \text{ и } (x-1)\cdot(x^2+x+1) = x^3 - 1 = 0.$$

Одавде следи да је

$$\begin{aligned} M(x) &= x^{-2012} + x^{-2011} + x^{2011} + x^{2012} \\ &= \left(x^3\right)^{-671} \cdot x + \left(x^3\right)^{-671} \cdot x^2 + \left(x^3\right)^{670} \cdot x + \left(x^3\right)^{670} \cdot x^2. \end{aligned}$$

Како је $x^3 - 1 = 0$, тј. $x^3 = 1$, следи да је

$$M(x) = x^{-2012} + x^{-2011} + x^{2011} + x^{2012} = x + x^2 + x + x^2 = -2.$$

Решавање једне Диофантове једначине је представљено у следећем задатку.

Задатак 4. У скупу целих бројева решити једначину

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{2012}\right)^{2012}.$$

Решење. Ова једначина се може преписати у облику

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}=\left(\frac{2013}{2012}\right)^{2012}.$$

Како је разломак $\dfrac{m+1}{k}$ за произвољан цео број k за који је $k(k+1)\neq 0$ редукован (јер је НЗД $(k,k+1)=1$), то су разломци $\left(\dfrac{m+1}{m}\right)^{m+1}$ и $\left(\dfrac{2013}{2012}\right)^{2012}$ редуковани, па су им једнаки бројиоци, односно имениоци. Још је и

$$\left(\frac{2013}{2012}\right)^{2012}=\left(\frac{-2012}{-2013}\right)^{-2012}=\left(\frac{-2013+1}{-2013}\right)^{-2013+1},$$

односно

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}=\left(\frac{-2013+1}{-2013}\right)^{-2013+1}.$$

Одавде следи да је

$$m+1=-2013+1 \text{ и } m=-2012,$$

чиме је доказано да је решење једначине $m=-2013$.

У наредном задатку је представљен број 2012 у једначини која се решава у скупу рационалних бројева.

Задатак 5. Одредити број решења једначине

$$x^{2012}+y^{2012}=x^{2013}+y^{2013}$$

у скупу рационалних бројева.

Решење. Трансформишимо дату једначину:

$$x^{2012}+y^{2012}=x^{2013}+y^{2013} \iff y^{2012}\cdot\left(\frac{x^{2012}}{y^{2012}}+1\right)=y^{2013}\cdot\left(\frac{x^{2013}}{y^{2013}}+1\right).$$

Сменом $\left|\dfrac{x}{y}=t,\ \text{за } y\neq 0\right|$, добијамо да је претходна једначина еквивалентна са

$$1+t^{2012}=y\cdot\left(1+t^{2013}\right).$$

Како је, из претходног, $t\neq -1$ следи да је

$$y=\frac{1+t^{2012}}{1+t^{2013}},x=t\cdot y=t\cdot\frac{1+t^{2012}}{1+t^{2013}}.$$

У случају да је $t = -1$, имамо да је $x = -y$. Сада, из почетне једначине следи да је

$$(-y)^{2012} + y^{2012} = (-y)^{2013} + y^{2013} = 0 \implies y = 0 \implies x = 0.$$

Коначно, скуп решења ове једначине је

$$\mathcal{S} = \left\{(0,0), \left(t \cdot \frac{1+t^{2012}}{1+t^{2013}}, \frac{1+t^{2012}}{1+t^{2013}}\right) : t \in \mathbf{Q} \setminus \{-1\}\right\}.$$

Из претходног следи да ова једначина има бесконачно много решења у скупу рационалних бројева.

У наредном задатку откривамо непознати број.

Задатак 6. Збир Петрове године рођења и цифара којима је та година записана једнак је 2012.

а) Које године је Петар рођен, ако је познато да је пунолетан?

б) Које године је Петар рођен ако има мање од 18 година?

Решење. Петрова година рођења је четвороцифрени број. Заиста, уколико би Петрова година рођења била троцифрени број $\overline{abc}$, онда би било

$$\overline{abc} + a + b + c = 101a + 11b + 2c \leqslant 909 + 99 = 18 = 1036 < 2012.$$

а) Петар је рођен пре 2000. године. Дакле, Петар је рођен $\overline{1abc}$-те године. Сада је

$$2012 = \overline{1abc} + a + b + c = 1000 + 101a + 11b + 2c \Rightarrow 101a + 11b + 2c = 1002.$$

Уколико је $a \leqslant 8$, онда је $1002 = 101a + 11b + 2c \leqslant 808 + 99 + 18 = 925$. Одатле следи да је $a = 9$.

Сада је $2012 = \overline{19bc} + b + c = 1900 + 11b + 2c \implies 11b + 2c = 102$. Уколико је $b \leqslant 7, 102 = 11b + 2c \leqslant 77 + 18 = 95$. Одатле је $b = 8 \vee b = 9$.

Ако је $b = 8$, онда је $c = 7$, а ако је $b = 9, c = \dfrac{3}{2}$. Одавде следи да је Петар рођен 1987. године.

б) Како је једина могућа Петрова година рођења у 20. веку 1987. година и како је Петар малолетан, то је Петар рођен $\overline{20ab}$-те године. То значи да је

$$2000 + 10a + b + 2 + 0 + a + b = 2002 + 11a + 2b = 2002 + 11a + 2b = 2012.$$

Одатле следи да је $11a + 2b = 10$. Како су непознате a и b цифре, из претходне једначине следи да је $a = 0$ и $b = 5$, тј. Петар је рођен 2005. године.

У наредна два задатка представљене су диофантске једначине у којима се јављају квадратни корени.

Задатак 7. У скупу целих бројева решити једначину

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2012}.$$

Решење. Како је $\sqrt{2012} \geq 0$, следи да је $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Сада је

$$\begin{aligned} &\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2012} \\ \iff &\sqrt{x}=2\sqrt{503}-\sqrt{y} \wedge \sqrt{y}=2\sqrt{503}-\sqrt{x} \\ \iff &x=2012-4\sqrt{503y}+y \wedge y=2012-4\sqrt{503x}+x \\ \overset{x,y\in\mathbf{Z}}{\iff} &x=503a^2 \wedge y=503b^2, \text{ за неке } a,b\in\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Заменом последње две једнакости у почетну једначину и користећи да је $\sqrt{2012} = 2\sqrt{503}$, добијамо да је почетна једначина еквивалентна једначини

$$|a|+|b|=2.$$

Једина решења претходне диофантске једначине су парови (a, b) који су елементи скупа

$$\{(0,2),(1,1),(2,0)\},$$

па је скуп решења једначине

$$R=\{(0,2012),(503,503),(2012,0)\}.$$

Задатак 8. У скупу целих бројева решити једначину

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2-y+1}=2011^{2012}.$$

Решење. Како су бројеви x^2+x+1 и y^2-y+1 цели за целобројне вредности x и y, то су квадратни корени тих бројева или природни или позитивни ирационални бројеви. Како је број 2011^{2012} цео број, то следи да је $x^2-x+1=a^2$ и $y^2-y+1=b^2$, за неке $a, b \in \mathbf{N}_0$.

$$\begin{aligned} x^2+x=x(x+1)\equiv_2 0 &\implies x^2+x+1\equiv_2 1 \implies a\equiv_2 1, \\ y^2-y=y(y-1)\equiv_2 0 &\implies y^2-y+1\equiv_2 1 \implies b\equiv_2 1. \end{aligned}$$

Коначно је

$$1\equiv_2 2011^{2012}=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2-y+1}=a+b\equiv_2 0,$$

што је контрадикција па једначина у овом задатку нема решења у скупу целих бројева.

У наредном задатку је приказано коришћење неједнакости између аритметичке и геометријске средине у решавању диофантских једначина.

Задатак 9. У скупу природних бројева решити једначину

$$\left(x_1^2+1^2\right)\cdot\left(x_2^2+2^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_{2012}^2+2012^2\right)=2^{2012}\cdot 2012!\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{2012}.$$

Решење. Подсетимо се најпре неједнакости између аритметичке и геометријске средине. За произвољна два позитивна реална броја a и b је

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},\quad \text{односно}\quad a+b\geqslant 2\sqrt{ab},$$

где једнакост вази ако и само ако је $a=b$.

Претходна неједнакост повлачи да је

$$\begin{gathered} x_1^2 + 1^2 \geqslant 2x_1 \cdot 1, \\ x_2^2 + 2^2 \geqslant 2x_2 \cdot 2, \\ \vdots \\ x_{2012}^2 + 2012^2 \geqslant 2x_{2012} \cdot 2012. \end{gathered}$$

Множењем претходних неједнакости добијамо да је

$$\left(x_1^2 + 1^2\right) \cdot \left(x_2^2 + 2^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(x_{2012}^2 + 2012^2\right) \geqslant 2^{2012} \cdot 2012! \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2012},$$

што значи да је решење ове једначине

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_{2012} = 2012.$$

У наредним задацима су приказани проблеми са факторијелима природних бројева. Први од тих задатака бави се поједностављивањем израза.

Задатак 10. Доказати да је

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + 2012 \cdot 2012! = 2013! - 1.$$

Решење. Како за произвољан природан број k важи да је $k{\cdot}k! = (k{+}1{-}1){\cdot}k! = (k+1)! = -k!$, то је

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + 2012 \cdot 2012! = 2! - 1! + 3! - 2! + \cdots + 2013! - 2012! = 2013! - 1.$$

Задатак 11. У скупу природних бројева решити једначину

$$m_1! + m_2! + \cdots + m_{2012}! = 2012!.$$

Решење. Након дељења једначине

$$m_1! + m_2! + \cdots + m_{2012}! = 2012!$$

са 2012! добијамо да је

$$\frac{1}{(m_1+1) \cdot \ldots \cdot 2012} + \frac{1}{(m_2+1) \cdot \ldots \cdot 2012} + \ldots + \frac{1}{(m_{2012}+1) \cdot \ldots \cdot 2012} = 1.$$

Лева страна претходне једначине је мања или једнака од $\dfrac{2012}{2012} = 1$ а једнакост важи ако и само ако је

$$m_1 + 1 = \cdots = m_{2012} + 1 = 2012,$$

одакле следи да је једино решење ове једначине

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_{2012} = 2011.$$

Задатак 12. Да ли постоји природан број $k \leqslant 2012$ тако да је број

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2012!}{k!}$$

квадрат природног броја?

Решење. Уочимо најпре да је производ

$$P = 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2012!$$

једнак

$$P = 1^{2012} \cdot 2^{2011} \cdot \ldots \cdot k^{2013-k} \cdot \ldots \cdot 2011^2 \cdot 2012^1.$$

Даље је

$$\begin{aligned} P &= \left(1^{1006} \cdot 2^{1005} \cdot 3^{1005} \cdot \ldots \cdot 2011^1\right)^2 \cdot 2012 \cdot 2010 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 \\ &= \left(1^{1006} \cdot 2^{1005} \cdot 3^{1005} \cdot \ldots \cdot 2011^1\right)^2 \cdot (2 \cdot 1006) \cdot (2 \cdot 1005) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 1) \\ &= \left(1^{1006} \cdot 2^{1005} \cdot 3^{1005} \cdot \ldots \cdot 2011^1 \cdot 2^{503}\right)^2 \cdot 1006!. \end{aligned}$$

Из претходног видимо да постоји природни број $k \leqslant 2012$ такав да је број

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2012!}{k!}$$

квадрат природног броја. Тај број је $k = 1006$.

Остаје отворено питање да ли је $k = 1006$ једини такав природан број.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, Материјали за младе математичаре, свеска 15, ДМС, Београд 2004.
2. С. Б. Бранковић, *Збирка решених задатака из математике за средње школе, одабрана поглавља*, Завод за уџбенике, Београд 2007.
3. *Тангента 10*, Збирка задатака објављених у рубрици „Задаци из математике“ часописа *Тангента* 1995–2005. године, ДМС, Београд 2006.
4. И. Долинка, *Елементарна теорија бројева: моји омиљени задаци*, ДМС, Београд 2007.
5. В. Балтић, Д. Ђукић, Ђ. Кртинић, И. Матић, *Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији*, ДМС, Београд 2008.

Природно-математички факултет, Ниш

E-mail: dsimce@gmail.com, vesic.specijalac@gmail.com