Др Владимир Мићић

ПРАВИЛА НАЛАЖЕЊА ЧЛАНОВА НИЗА

Наставним програмом предмета Математика предвиђено је да у четвртом разреду основне школе ученици упознају скуп $\mathbf{N}$ природних бројева и скуп $\mathbf{N}_0$ природних бројева проширених нулом. У петом разреду, у оквиру наставне теме Скупови, ови се садржаји понављају и систематизују, да бисмо се, потом, њима користили и у следећим разредима. При томе се, природно, појављује и појам низа природних бројева, задатог правилом налажења његових чланова. Оно може бити записано одговарајућом формулом n-тог члана или задато на неки други начин. Само за нашу употребу, никако за наставну праксу у петом разреду, подсетимо се да, ако је a_n поменути n-ти члан низа, ми такав низ записујемо са $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ или, краће $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. У петом разреду ћемо се задовољити тиме да, у случајевима када је позната формула n-тог члана, низ задамо тако што само запишемо формулу за a_n, на пример $a_n = 4n-3$, или $h_n = 2^n$, и да, евентуално, „нанижемо“ првих неколико (бар три) чланова посматраног низа; у првом случају налазимо низ 1, 5, 9, 13, ... а у другом случају 2, 4, 8, ... Задавање правила налажења чланова низа „на неки други начин“ може бити разноврсно. Пример тако формираног низа може бити: први члан низа је 1 а сваки даљи члан низа једнак је збиру његовог редног броја у низу и члана низа који му претходи. Ако „нанижемо“ првих неколико чланова, наћи ћемо бројеве: 1, $2+1=3$, $3+3=3+(2+1)=6$, $4+6=4+(3+2+1)=10$, $5+10=5+(4+3+2+1)=15$, ... : добили смо низ 1, 3, 6, 10, 15, ... У овом случају већина ученика ће, уверени смо, лако наћи формулу за налажење n-тог члана низа у облику

$$a_n = n + (1+2+3+\dots+(n-1)) = 1+2+3+\dots+(n-1)+n, \quad n\in\mathbf{N},$$

а известан број њих ће бити у стању и да нађе тај збир и дође до формуле

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n\in\mathbf{N}.$$

Познат је пример формирања Фибоначијевог низа $(F_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$; његови су чланови Фибоначијеви бројеви F_n дефинисани са:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \quad \text{за све } n \geqslant 1,$$

па ће првих неколико чланова тог низа бити бројеви 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Овде смо срели типичан пример низа који је задат *рекурентном формулом*, којом се чланови низа задају преко неколико (у нашем случају два) претходних чланова низа, при чему је познато довољно почетних чланова низа (у нашем случају бар два) који ће обезбедити одређеност свих даљих чланова низа. Надамо се да не грешимо ако устврдимо да ће велики број ученика старијих разреда ОШ на основу наведених првих осам чланова Фибоначијевог низа бити у стању да препозна правило по којем је тај низ формиран. Оно би могло гласити: Прва два члана низа су 0 и 1, а сваки следећи члан се добија као збир претходна два члана низа. Али, као што знамо, проблем налажења правила по којем се F_n изражава у функцији од $n \in \mathbf{N}_0$ није једноставан и захтева озбиљан математички апарат (видети, на пример, [1]). Подсетимо се да то правило (ми бисмо рекли формула општег члана) гласи:

$$F_n = \frac{a_n - b_n}{\sqrt{5}}, \qquad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \ b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad n \in N_0.$$

Овде наведени, као и бројни задаци с којима смо се срели током наше наставне праксе у оквирима наставе математике у ОШ или бављења ваннаставним активностима у области математике, уверили су нас да је налажење првих неколико чланова низа који је задат формулом општег члана као правилом налажења његовог n-тог члана, по правилу, једноставан задатак. Ово „по правилу“ треба да нас упозори да није увек тако; пример Фибоначијевог низа нам показује да је, на пример, једноставно наћи његов осми члан (број 13) користећи се “ изворним“ правилом налажења његових чланова, а налажење тог истог члана (њега одређује $n = 7$ јер низање почињемо од $n = 0$) помоћу формуле општег члана је озбиљан задатак и сигурно му није место у настави математике у ОШ. Задовољавамо се, зависно од разреда у којем се налазимо, класама низова типа:

$$a_n = 3n - 2, \quad b_n = n^2 + 1, \quad c_n = 3^n, \quad d_n = 2^n - 1, \quad n \in \mathbf{N},$$

или (ако то проценимо прихватљивим) њиховим комбинацијама:

$$e_n = n^2 + 2n - 1, \quad f_n = 3^n n, \quad g_n = 3 \cdot 2^n - 5n + 2, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ученици ће без тешкоћа „нанизати“ првих неколико чланова таквих низова.

Чешће се, међутим, срећемо са задацима у којима треба одредити, препознати, наслутити, ... , правило за одређивање n-тог члана низа на основу датих неколико његових почетних чланова. Формулацијом таквих задатака најчешће се тражи да се наведе следећих неколико чланова низа, што, наравно подразумева да смо поменуто правило одредили, препознали, наслутили, ... , или се тражи да се оно запише у облику формуле (формуле општег члана), па се даљи чланови низа могу рачунати. Овакве задатке срећемо у свим образовним системима, па и у нашем, у основној и додатној настави, на разним тестовима за проверу знања, укључујући и завршне испите (мале матуре), на разним такмичењима, у тестовима за проверу интелигенције, у занимљивим математикама разних намена, у новинама и часописима у рубрикама за популаризацију наука, ... Они су занимљиви, подстицајни и, нажалост, *по правилу погрешно фомулисани.*

Природно је, у вези са задацима оваквог типа, себи поставити питање: да ли је са првих неколико чланова низа правило „низања“ његових чланова једнозначно одређено? Одговор је негативан. Због тога задатке оваквог типа морамо опрезно формулисати.

Претпоставимо да је у одељењу петог разреда рађен тест и да смо ученицима задали неколико задатака са садржајима из ове проблематике.

Пример 1. Позната су нам прва три члана низа 2, 4, 8, ... Која су следећа два члана тог низа?

Ученици, наравно, препознају степене броја 2 ($2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$) и без много размишљања закључују да су следећа два члана тог низа бројеви 16 и 32 ($16 = 2^4$, $32 = 2^5$). Тиме су препознали, (боље) наслутили, а неки од њих и написали, да је правило за налажење n-тог члана нашег низа (формула општег члана) $a_n = 2^n$. Ученици задовољни, ми задовољни.

А радознали Перица још седи и зноји се и после десетак минута тријумфално нам саопштава да су следећа два члана тог низа бројеви 14 и 22. Ученици затим засипају Перицу питањима: „Како то, Перице?“, „Зашто би то били управо бројеви 14 и 22?“, „Размисли Перице још мало!“ Али, Перица се не да; показује нам свеску у којој је записао „своју“ формулу општег члана $p_n = n^2 - n + 2$. Ученици проверавају његову рачуницу и налазе, редом $p_1 = 1^2 - 1 + 2 = 2$, $p_2 = 2^2 - 2 + 2 = 4$, $p_3 = 3^2 - 3 + 2 = 8$, $p_4 = 4^2 - 4 + 2 = 14$, $p_5 = 5^2 - 5 + 2 = 22$. „Па Перица је у праву!“, њихов је коментар. Уверили су се да постоји још један низ чија су прва три члана задати бројеви 2, 4, 8.

А ми постајемо свесни да смо, неопрезно, у формулацији задатка пропустили да нагласимо да тражимо *једно од могућих решења*, у ствари следећа два члана *једног од низова* чија су прва три члана задата. Јасно је да је Перица, подстакнут раније рађеним задацима овог типа, у којима је формула општег члана садржала линеарне комбинације првог и другог степена броја n, нашао једну од формула општег члана низа чија су прва три члана задата и која припада тој класи. Она се битно разликује од претходне, припада класи полиномних формула док претходна припада класи експоненцијалних формула.

Технички је тек мало захтевнији следећи пример; могли бисмо га сместити у седми разред, на час додатне наставе, који смо организовали кроз рад у групама од по три ученика. Једноставности ради поновићемо „сценарио“ из примера 1 и опет замислити радозналог Перицу и његову групу у улози оспоравателља „званичног“ решења.

Пример 2. Позната су прва три члана низа 5, 10, 17, ... Која су следећа два члана тог низа?

После краћег времена већина група ће нам понудити бројеве 23 и 35 као следећа два члана низа а формулу $a_n = n^2 + 2(n+1)$ као формулу општег члана. Али, Перица као Перица, уз помоћ своје групе саопштава нам бројеве 28 и 47 као следећа два члана низа и формулу $p_n = 2^n + 3n$. Уверавамо се да су и једни и други у праву.

Ситуација се понавља; имамо две различите формуле општег члана за два различита низа чија су прва три члана задати бројеви. И овог пута, да бисмо избегли неспоразуме, морамо тражити *један од могућих* парова следећа два члана или *једно од правила* општег члана низа чија су прва три члана задата. Јасно је да се на прва три задата члана низа ограничавамо искључиво због могућих техничких тешкоћа.

Изађимо на тренутак из одељења. Мало математичког апарата који следи потврдиће да нас питање одређености формуле општег члана са задатих првих неколико, на пример k, чланова низа, води до општег проблема налажења интерполационе функције из изабране класе функција, која „пролази“ кроз задатих k чворова.

Задато је првих k чланова низа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$. Нека је

$$F(x; p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k)$$

функција променљиве x која припада изабраној класи функција и зависи од k реалних параметара. Ако је, на пример, изабрана класа функција класа полинома, имаћемо класу полинома $(k-1)$-вог степена $p_1x^{k-1} + p_2x^{k-2} + \cdots + p_{k-1}x + p_k$. Онда нам свако решење $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ система једначина са k непознатих

$$F(1; p_1, p_2, \ldots, p_k) = a_1,\ F(2; p_1, p_2, \ldots, p_k) = a_2,\ \ldots,\ , F(k; p_1, p_2, \ldots, p_k) = a_k \tag{$*$}$$

даје формулу општег члана $a_n = F(n; p_1, p_2, \ldots, p_k)$, која испуњава задате услове (првих k чланова тог низа поклапа се са задатим). Помоћу добијене формуле можемо израчунати по жељи много његових даљих чланова.

Ако проблем „сместимо“ у координатни систем xOy, уочавамо да, у ствари, међу графицима функција из класе $y = F(x; p_1, p_2, \ldots, p_k)$ тражимо ону (оне) која пролази кроз „чворове интерполације“, тачке $T_1(1, a_1)$, $T_2(2, a_2)$, ... , $T_k(k, a_k)$.

Ако се определимо за класу полинома, што је најчешћи случај, систем $(*)$ био систем линеарних једначина

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = a_1, \quad p_1 2^{k-1} + p_2 2^{k-2} + \cdots + p_{k-1} 2 + p_k = a_2, \quad \ldots,$$
$$p_1 k^{k-1} + p_2 k^{k-2} + \cdots + p_{k-1} k + p_k = a_k.$$

Ово је „квадратни“ систем линеарних једначина; његова је детерминанта позната Ван дер Мондова детерминанта и различита је од 0, па систем има јединствено решење. Наћи то решење можемо користећи се Крамеровим правилом или на неки други начин. Други, нама прихватљивији, поступак је формирање Лагранжевог интерполационог полинома са задатих k чворова $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ... , (k, a_k) (видети, на пример, [2]). На познати начин налазимо, непосредно,

$$a_n = \frac{(n-2)(n-3)\cdots(n-k)}{(1-2)(1-3)\cdots(1-k)}\, a_1 + \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-k)}{(2-1)(2-3)\cdots(2-k)}\, a_2 + \cdots +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{(k-1)(k-2)\cdots(k-(k-1))}\, a_k = L_{k-1}(n).$$

Видимо да је заиста $L_{k-1}(1) = a_1$, $L_{k-1}(2) = a_2$, ... , $L_{k-1}(k) = a_k$. Нађеним полиномом можемо се послужити да формирамо нове формуле општег члана низа са захтеваним својствима. Нека је $f(n)$ произвољна функција дефинисана за све $n \in \mathbf{N}$. Онда је формулом

$$b_n = L_{k-1}(n) + (n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))(n-k)\,f(n)$$

задат низ $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ за који је испуњено: $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, ... , $b_k = a_k$, а вредности његових даљих чланова зависе од f. Дакле, избором функције f можемо формирати различите низове, чијих је првих k чланова задато.

Технички је захтевније радити с другим класама функција. Ако су нам задата, на пример, прва четири члана низа, можемо тражити да буде

$$a_n = (pn+q)\,2^{rn+s}, \quad n \in \mathbf{N},$$

при чему смо неопходна четири параметра означили са p, q, r, s. Јасно је да се, у општем случају, математичким апаратом овог типа нећемо бавити у ОШ.

Вратимо се у одељење. Примери које смо, уз одговарајуће коментаре, урадили, као и мало формалнија теоријска основа коју смо кроз претходне редове презентирали, уверили су нас да, приликом формулисања задатака у којима, на основу задатих неколико почетних чланова низа, тражимо „правило низања" или неколико чланова који после њих следе, морамо тражити *једно од правила* или тражити од ученика „који би бројеви *могли* бити" даља два (три, четири, ...) члана тог низа.

Док задаци у којима се тражи неколико првих чланова низа на основу задате формуле општег члана низа не захтевају посебан коментар на овоме месту, већина задатака у којима је задато првих неколико чланова низа и тражи се формула општег члана, које налазимо у уџбеничким материјалима за пети разред ОШ, односи се на задатке у којима је једна од могућих формула општег члана облика $a_n = kn + c$, $n \in \mathbf{N}$ (или $n \in \mathbf{N}_0$). У тим случајевима породица графика функција које припадају двопараметарској породици $y = kx + c$ (реални параметри су k и c) представља породицу правих линија и за налажење одређене праве довољно је задати два услова, дакле, довољно је задати два „чвора", што значи два почетна члана низа. А ако је задато више почетних чланова тог низа, морамо водити рачуна о томе да сви чворови припадају тој правој, колинеарни су. Имајући у виду раније речено, можемо очекивати да се у одељењу појави и нека друга формула општег члана. С друге стране, ако задати чворови нису колинеарни, формула општег члана не може бити линеарна по n. У таквим случајевима, тражимо је у класама формула типа: $a_n = pn^2 + qn + r$, $a_n = pn^3 + qn^2 + rn + s$, ... , $a_n = p2^n + q$, $a_n = (pn+q)2^n$, $a_n = 3^{pn+q} + rn + s$, ...

Нека је у координатној равни xOy права p задата једначином $y = kx + s$. Знамо да две тачке $A(a, \alpha)$, $B(b, \beta)$ припадају тој правој ако и само ако је

$$k = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \quad \text{и} \quad s = \alpha - a\,\frac{\beta - \alpha}{b - a}. \tag{$**$}$$

Ако тој правој припада више од две тачке, онда за сваке две од њих важи $(**)$.

Посматрајмо низ $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и њему припадајуће чворове $T_1(1, a_1)$, $T_2(2, a_2)$, $T_3(3, a_3)$, ... У координатној равни xOy ти ће чворови бити колинеарни ако и само постоје такви k и s да за свака два од њих важи ($**$). Јасно је да услов „свака два од њих“ можемо заменити са „свака два узастопна од њих“. За свака два узастопна члана низа a_m и a_{m+1}, $m \in \mathbf{N}$ и њима одговарајуће чворове $T_m(m, a_m)$ и $T_{m+1}(m+1, a_{m+1})$ важи да је $b - a = m + 1 - m = 1$, па ће за њих важити да је за свако $m \in \mathbf{N}$

$$k = a_{m+1} - a_m \quad \text{и} \quad s = a_m = m - (a_{m+1} - a_m) = a_m - mk.$$

Прва од ових једнакости нам показује да је разлика свака два узастопна члана таквог низа стална и једнака k, а из друге једнакости „читамо“ формулу општег члана $a_n = nk + s$.

Пример 3. Прва четири члана низа $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ су бројеви 9, 16, 23, 30. Нађи једну од формула општег члана таквог низа.

Уочавамо да за наведене чланове низа важи да је сваки следећи члан већи за 7 од претходног члана низа. На основу малопре доказаног, то значи да су њима одређени „чворови“, тачке $T_1(1, 9)$, $T_2(2, 16)$, $T_3(3, 23)$, $T_4(4, 30)$, колинеарни (припадају једној правој). Ако је једначина те праве $y = kx + s$, налазимо да је $k = 7 = 16 - 9$ ($= 23 - 16 = 30 - 23$), а $s = 2 = 9 - 17$ ($= 16 - 2 \cdot 7 = 23 - 3 \cdot 7 = 30 - 4 \cdot 7$) На тај начин смо нашли једну од формула општег члана тог низа, $a_n = 7n + 2$.

У осмом разреду, на часу додатне наставе, ученици ће се, уверени смо у то, успешно „изборити“ и са задацима у којима правило за налажење општег члана низа не може бити линеарно по n. Пример 4 показује како то може изгледати у случају да га тражимо у облику полинома, при чему је решавање система једначина тек мала техничка тешкоћа.

Пример 4. Прва четири члана низа $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ су бројеви 1, 7, 25, 61. Која два броја могу бити следећа два члана таквог низа? Нађи једну од формула општег члана таквог низа.

Уверавамо се да разлике узастопних чланова низа нису једнаке, што значи да његови чворови нису колинеарни, па формулу општег члана не можемо тражити у облику $A_n = kn + s$. Потражимо је у облику полинома степена већег од 1. Будући да су нам задата прва четири члана низа, полином треба да буде степена већег или једнаког три, јер такав полином садржи бар четири коефицијента (четири параметра). Дакле, нека је

$$A_n = an^3 + bn^2 + cn + d, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Коефицијенти (параметри) a, b, c, d задовољавају једначине

$$a + b + c + d = 1, \quad 8a + 4b + 2c + d = 7,$$
$$27a + 9b + 3c + d = 25, \quad 64a + 16b + 4c + d = 61.$$

Решавањем овог система једначина налазимо да је $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $d = 1$, па је једна од формула општег члана низа чија су прва четири члана 1, 7, 25, 61

$$A_n = n^3 - n + 1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Јасно је да су, у том случају, следећа два члана низа бројеви 121 и 211.

Напомена. Наравно, може се десити да задата прва четири члана низа чији чворови нису колинеарни, припадају низу чија је формула општег члана полином другог степена; у таквом случају бисмо добили да је $a = 0$. То нипошто, имајући у виду раније наглашену чињеницу да формула општег члана није једнозначно одређена с његових неколико почетних чланова, не искључује могућност да, чак и у класи полинома, постоје полиноми степена већег од три који би, у функцији формуле општег члана, генерисали низ чија се прва четири члана поклапају са задатим бројевима. То није тема овог прилога.

За наше потребе, али не и за рад у одељењу, и у овом случају смо се могли користити Лагранжевом методом. Она би нам ту формулу дала непосредно:

$$\begin{aligned} A_n = {} & \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \cdot 1 + \frac{(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \cdot 7 + \\ & + \frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \cdot 25 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \cdot 61. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Јанковић, В., ***Диференцне једначине***, Материјали за младе математичаре, св. 8, Друштво математичара, физичара и астронома СР Србије, Београд 1976.
2. Sawyer, W.W., *Prelude to Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York 1982.

E-mail: vladimic@eunet.rs