Др Ђоко Г. Марковић

ГЕОМЕТРИЈСКИ ПОЛИФОРМИЗАМ У ФУНКЦИЈИ РАЗБИЈАЊА ФОРМАЛИЗМА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

1. Полиформизми „шаригиновског" типа

„Геометрија треба да буде геометријска, а не аналитичка или алгебарска." [1] Главни јунак те приче треба да буде фигура, при чему на њеној површини треба да буде троугао и кружница (круг), а главно средство учења треба да буде цртеж и слика. Дакле, правилан цртеж и лијепа слика треба да буду доминантна средства геометрије. Уџбеници у којима доминирају геометријски садржаји не треба да се своде само на прављење геометријских теорија. Процес учења тих садржаја укључује најразноврсније облике рада. У првом реду ту се мисли на рјешавање задатака.

Када је почетком треће деценије XX вијека Рудолф Арнхајм, један од оснивача гешталтистичког правца у психологији, писао своје капитално дјело Визуелно мишљење (јединство слике и појма), све своје тврдње базирао је на геометријским интепретацијама.

Цртање је први корак ка апстракцији (битна својства се сажимају, а небитна занемарују). Геометријске слике правимо да бисмо стабилизовали наше унутрашње представе. Визуелно мишљење – мишљење у сликама има особину свеобухватности и није лако преносиво. Слике, тј. иконе представљају носиоце информација. Зато И.Ф. Шаригин, када говори о „доброј геометрији", ставља у центар приче добар задатак приказан лијепом сликом и живим језиком.

„Живи језик" омогућава да визуелно мишљење буде лако преносиво. Чланак И.Ф. Шаригина објављен 2004. године потврдио је оно што сам имао у виду када сам писао „Геоемтријску читанку" и „Геометријски полиформизам" [6] – методичке приручнике, тј. да широки спектар необичних геометријских прича и интерпретација илустрованих сликама „шаригиновског" облика, обогачује значајно наставу математике у функцији разбијања формализма у њој.

2. Остали геометријски полиформизми

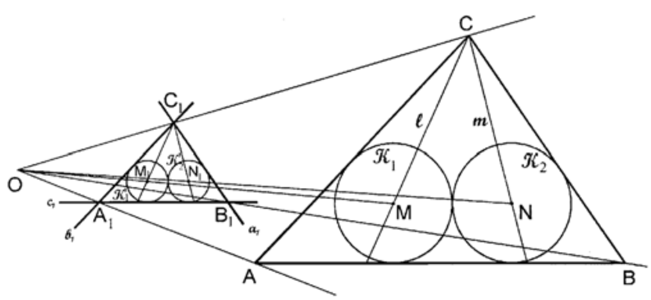
Није ми намјера да овдје елаборирам све могуће нешаригиновске полиформизме, којих у настави математике има веома много, већ да на упечатљивим примјерима приказујући неке од граничних случајева укажем на компоненте математичке љепоте којом је сваки, па и нешаригиновски полиформизам „обојен".

У цитираном чланку [1] И.Ф. Шаригин каже: „Задатак није само вјештина, то је елемент знања. Ученик треба да се упозна са одређеним циклусом довољно тешких геометријских задатака поводећи се за познатим моделима. Узгред буди речено, у томе се у суштини састоји процес учења алгебре. Ученику показујемо методе, саопштавамо алгоритме, које је тешко, скоро немогуће наћи самостално. У геометрији, за разлику од алгебре, сличних алгоритама је врло мало, скоро да их нема. Скоро сваки геометријски задатак је нестандардан. Због тога приликом наставе расте значај кључних задатака, који објашњавају корисне чињенице или илуструју методу.“

Када говорим о полиформизму геометријског типа, прије свега мислим на шаригиновске полиформизме и оне граничне примјере осталих геометријских полиформизама, тј. задатке чије главне инструменте представљају лијепе слике, и живи језик. Дакле, овдје ћу посматрати само оне полиформизме нешаригиновског типа презентоване таквим цртежима који припадају граничном подручју, тј. превасходно водећи рачуна о основном принципу перципирања, на којем почива и комплетна визија математичке љепоте.

Примјер. У дати троугао ABC уписати двије подударне кружнице које се додирују и од којих свака додирује по двије странице тога троугла.

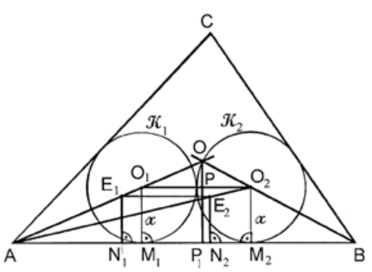
Рјешење 1. Јасно је да обије кружнице додирују једну од страница троугла. Претпоставимо да једна и друга кружница додирују страницу AB. Тражене кружнице можемо конструисати користећи хомотетију. Конструишимо произвољно праву c_1 паралелну правој (AB) тако да она представља тангенту на двије произвољне кружнице $\mathcal{K}_1'$ и $\mathcal{K}_2'$ једнаких полупречника, које се додирују (види слику 1). Конструишимо на ове кружнице тангенте a_1 и b_1, које су респективно паралелне правим (BC) и (AC). Троугао $A_1B_1C_1$ који образују праве a_1, b_1 и c_1, има странице које су паралелне страницама троугла ABC па постоји хомотетија којом се $\triangle A_1B_1C_1$ пресликава у $\triangle ABC$. Центри M и N кружница $\mathcal{K}_1(M,r)$ и $\mathcal{K}_2(N,r)$ које треба конструисати налазе се редом у пресјеку правих (OM_1) и (ON_1) са правим l и m, тј. $(OM_1)\cap l=\{M\}$ и $(ON_1)\cap m=\{N\}$, при чему је $l \parallel (C_1M_1)$ и $m \parallel (C_1N_1)$.



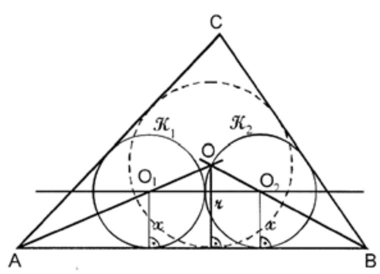
Сл. 1

Рјешење 2. Претпоставимо да је задатак рјешен. Центри кружница $\mathcal{K}_1(O_1,x)$ и $\mathcal{K}_2(O_2,x)$, тј. тачке O_1 и O_2, припадају редом симетралама углова BAC и

ABC троугла, при чему је $O_1M_1 = O_2M_2 = x$, тј. $O_1O_2 = 2x$. Нека је са O обиљежен центар уписане кружнице $\triangle ANC$, тј. $\{O\} = (AO_1) \cap (BO_2)$. Задатак се своди на то да се у $\triangle ABO$ упише правоугаоник $M_1M_2O_2O_1$ чија је једна страница два пута дужа од друге, тако да $M_1, M_2 \in \overline{AB}$, $O_1 \in \overline{AO}$ и $O_2 \in \overline{BO}$. У ту сврху на симетрали (AO_1) угла BAC изаберимо произвољну тачку E_1 (сл. 2). Нека је N_1 подножје нормале спуштене из тачке E_1 на дуж $\overline{AB}$ и нека је тачка $N_2 \in \overline{AB}$ таква да је $N_1N_2 = 2E_1N_1$. Означимо са E_2 четврто тјеме правоугаоника $N_1N_2E_2E_1$, а затим одредимо тачку O_2 тако да је $\{O_2\} = (OB) \cap (AE_2)$. Хомотетијом $\mathcal{H}_A^k$ тачка E_2 пресликава се у тачку O_2, тј. $\mathcal{H}_A^k(E_2) = O_2$, па је $\overrightarrow{AO_2} = k\overrightarrow{AE_2}$, одакле је $k = |\overrightarrow{AO_2}|/|\overrightarrow{AE_2}|$. Хомотетија $\mathcal{H}_A^k$ пресликава правоугаоник $N_1N_2E_2E_1$ у тражени правоугаоник $M_1M_2O_2O_1$. Тачке O_1 и O_2 су центри тражених кружница $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, а дужи $\overline{O_1M_1}$ и $\overline{O_2M_2}$ дужине $O_1M_1 = O_2M_2 = x$ су њихови полупречници. Очигледно, задатак има три рјешења, јер умјесто странице $\overline{AB}$, можемо узети да кружнице $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ додирују страницу $\overline{BC}$, односно $\overline{CA}$. Нека је $PP_1 = O_1M_1 = O_2M_2 = x$ и $OP = r$. Тада хомотетија $\mathcal{H}_O^{k_1}$ врши сљедећа пресликавања: $\mathcal{H}_O^{k_1}(A) = O_1$, $\mathcal{H}_O^{k_1}(B) = O_2$ и $\mathcal{H}_O^{k_1}(P_1) = P$, гдје је $k_1 = \dfrac{2x}{c}$, па из $k_1 = \dfrac{2x}{c} = \dfrac{r-x}{r}$ сљеди $x = \dfrac{cr}{2r+c} = \dfrac{r}{1+\frac{2r}{c}}$, односно x има највећу (најмању) дужину када је c најдужа (најкраћа) страница троугла ABC.



Сл. 2



Сл. 3

Рјешење 3. Нека обје тражене кружнице $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ додирују страницу $\overline{AB}$. Обиљежимо са r полупречник кружнице уписане у $\triangle ABC$, а са x полупречник тражених кружница (сл. 3). Из сличности троуглова $\triangle ABO \sim \triangle O_1O_2O$ сљеди $r : (r-x) = c : 2x$, па је као и у претходном рјешењу $x = \dfrac{cr}{2r+c}$.

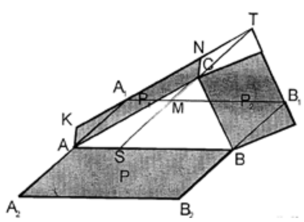
Конструкција. Центри тражених кружница $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ припадају симетралама углова BAC и ABC на удаљености $x = \dfrac{cr}{2r+c}$ од странице $\overline{AB}$. Дуж дужине x конструишемо као четврту пропорционалу (користећи Талесову теорему) у пропорцији $(c+2r) : r = c : x$.

Ако бисмо посматрали цртеже којима су представљена рјешења 1, 2 и 3 у ширем смислу, могли бисмо их сврстати у шаригиновске полиформизме, док би у ужем смислу припадали осталим нешаригиновским геометријским полиформизмима.

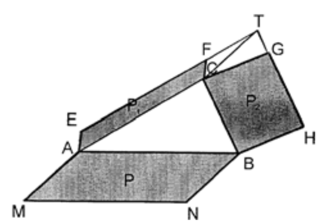
Спектар различитих приступа код рјешавања проблема или доказивања теорема често можемо проширити на читав низ иновираних доказа који обједињавају већину претходних. Та раритетна доказивања илустроваћу афином верзијом Питагорине теореме – Папусовом теоремом.

Папусова теорема. Над страницама CA и BC произвољног троугла ABC конструисани су (у спољашности тог троугла) паралелограми с површинама P_1 и P_2. Нека је T тачка пресјека правих на којима леже странице паралелне са CA и BC. Ако се над трећом страницом AB конструише паралелограм чија је друга страница паралелна и једнака CT, а површина тог паралелграма је P, тада је $P = P_1 + P_2$.

Доказ 1. Трећи паралелгорам ABB_1A_1 конструисаћемо према унутрашњости троугла ABC, јер је доказ у тром случају једноставан (сл. 4). Тјемена A_1 и B_1 тог паралелограма припадају паралелним страницама првих двају паралелограма, јер су $CT = AA_1 = BB_1 = AA_2 = BB_2$, као наспрамне странице тих паралелограма. Тада је $P_1 = P_{AA_1TC}$ јер паралелограми $AKNC$ и AA_1TC имају заједничку основицу AC, а наспрамне им странице KN и A_1T леже на истој правој. Такође је $P_{AA_1TC} = P_{AA_1MS}$ ис истих разлога, јер имају заједничку основицу AA_1, а наспрамне странице CT и SM им леже на истој правој. Слично поступајући са другим паралелограмом добијамо да је површина P_2 једнака површини преосталог дијела паралелограма AA_1B_1B. Одатле је $P_1 + P_2 = P_{AA_1MS} + P_{MSBB_1} = P$.



Сл. 4



Сл. 5

Доказ 2. Доказаћемо Папусову теорему примјеном векторског производа вектора. Посматрајући слику 5 лако је уочити да је

$$
\begin{aligned}
P &= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{TC}| = |(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \times \overrightarrow{TC}| \\
&= |(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{TC}) + (\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{TC})| = |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{TC}| + |\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{TC}| \\
&= P_1 + P_2.
\end{aligned}
$$

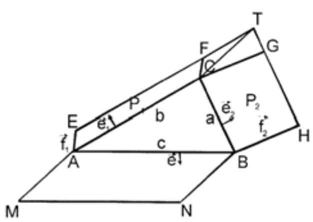
Апсолутна вриједност збира вектора у овом случају једнака је збиру апсолутних вриједности тих вектора зато што се овдје ради о векторима $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{TC}$ и $\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{TC}$ који су истог правца и смјера.

Доказ 3. А сада погледајмо како се Папусова теорема може доказати примјеном скаларног производа вектора. Нека су b и a дужине основица паралелограма,

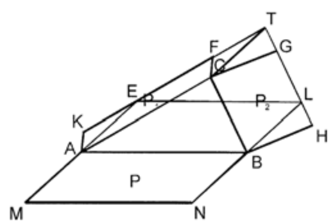
$\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ јединични вектори нормални на те основице, а $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ вектори бочних страница тог паралелограма. Тада је $P_1 = b\,\vec{e}_1 \cdot \vec{f}_1$ и $P_2 = a\,\vec{e}_2 \cdot f_2$ јер су $\vec{e}_1 \cdot \vec{f}_1$ и $\vec{e}_2 \cdot \vec{f}_2$ висине које респективно одговарају основицама b и a тих паралелограма. Како су $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}$ јединични вектори респективно нормални на странице a, b и c троугла ABC, према спољашности, то је $a\,\vec{e}_2 + b\,\vec{e}_1 + c\,\vec{e} = \vec{0}$, због $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ (где је $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$). Ово је очигледно јер транслацијом вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ у заједничку почетну тачку O и ротацијом за 90° они прелазе редом у $a\,\vec{e}_2$, $b\,\vec{e}_1$ и $c\,\vec{e}$. Како је $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}| = 1$ и $P = c\,\vec{e} \cdot \vec{f}$, $P_1 = b\,\vec{e}_1 \cdot \vec{f}_1$ и $P = a\,\vec{e}_2 \cdot \vec{f}_2$, као и $\vec{f} = \overrightarrow{TC}$, $\overrightarrow{CT} \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{f}_1$ (висина паралелограма површине P_1), и $\overrightarrow{CT} \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{f}_2$ (висина паралелограма чију смо површину означили са P_2), то је

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= b\,\vec{e}_1 \cdot \vec{f}_1 + a\,\vec{e}_2 \cdot \vec{f}_2 = b\,\vec{e}_1 \cdot \overrightarrow{CT} + a\,\vec{e}_2 \cdot \overrightarrow{CT} \\ &= (a\,\vec{e}_2 + b\,\vec{e}_1) \cdot \overrightarrow{CT} = -c\,\vec{e} \cdot \overrightarrow{CT} = P, \end{aligned}$$

што је и требало доказати (сл. 6).



Сл. 6



Сл. 7

Доказ 4. Папусову теорему можемо доказати и на следећи начин:

$$\begin{aligned} P &= P_{AELB} P_{AETLB} - P_{ELT} = P_{AETLB} - P_{ABC} \\ &= P_{AETC} + P_{BLTC} = P_{AKFC} + P_{BHGC} = P_1 + P_2. \end{aligned}$$

Овдје смо користили једнакост површина подударних троуглова $P_{ELT} = P_{ABC}$ и једнакост површина паралелограма једнаких дужина основица и одговарајућих висина, тј. $P_{AETC} = P_{AKFC}$ и $P_{BLTC} = P_{BHGC}$, сл. 7.

Питагорина теорема је непосредна посљедица Папусове теореме, тј. њен специјални случај, па се она може извести аналогно претходним поступцима. У историји математике то је познати Насир-ел-Дин ал Тусијев (1201–1274) доказ, објављен у арапском преводу Еуклидових „Елемената" 1594. године. На тај начин добили бисмо четири различита доказа те теореме.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Ф. Шаригин, ***Нужна ли школе 21-го века Геометрия?***, Математическое просвещение, сер. 3, вып. 8 (2004), 37–52.
2. G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, vol. I 1962, vol. II 1965.
3. R. Arnhajm, *Vizuelno mišljenje – jedinstvo slike i pojma*, Beograd, 1985.
4. М. Марјановић, ***Методика математике, први део***, Учитељски факултет, Београд, 1996.

5. М. Марјановић, *Методика математике, други део*, Учитељски факултет, Београд, 1996.
6. Ђ. Г. Марковић, *Геометријски полиформизам*, Макарије, Подгорица, 2006.
7. Ђ. Г. Марковић, *Нови погледи на методику наставе математике*, Макарије, Подгорица, 2008.
8. Ђ. Г. Марковић, *Методика наставе математике*, Јаникс, Београд и Инирекс, Подгорица, 2010.

E-mail: djokogm@hotmail.com