Др Шефкет Арсланагић

БЕРНУЛИЈЕВА НЕЈЕДНАКОСТ, ЊЕНЕ ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈЕ И ПРИМЈЕНА

Швајцарска породица Бернули (Bernoulli) јединствен је феномен у свијету; чак дванаест чланова ове породице се бавило математиком, физиком и хемијом. Када је у питању математика, највећи допринос овој науци су дали Јакоб (Jacob, 1654–1705), његов брат Јохан (Johann, 1667–1748) као и Јоханов син Даниел (Daniel, 1700–1782). Прва двојица су обилно задужили математику, док је Даниел највећи допринос дао у физици (хидродинамици). Јакоб је дао значајне резултат у теорији вјероватноће, написао је дјело Ars conjectandi, та књига му је публикована постхумно 1713. године. У њој се налазе дијелови који се односе на Бернулијеве бројеве и Бернулијеву теорему. Њему се приписује и позната Бернулијева неједнакост (изречена и доказана 1689. године) о којој ће овдје бити говора, а која има велику примјену у разним областима математике.

Најприје ћемо дати ову неједнакост у најпознатијем њеном облику који гласи:

Теорема 1. *Ако је $x > -1$ и ако је n природан број, тада је*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx. \tag{1}$$

Доказ. Доказ ћемо извести помоћу математичке индукције.

Ако је $n=1$, тада (1) постаје једнакост, тј. неједнакост је тачна за $n=1$. Претпоставимо да (1) важи за $n=k\geqslant 1$, тј. да је за $x>-1$:

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx. \tag{2}$$

Множећи релацију (2) са $1+x>0$, добијамо:

$$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2,$$

одакле је

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x.$$

Овим је завршен индуктивни доказ. ■

Напомена. Очигледно у (1) важи једнакост и за $x=0$. У литератури се ова неједнакост може наћи записана и у облику:

$$(1+x)^n > 1+nx, \qquad -1 < x \neq 0,\ n\in\mathbf{N},\ n\geqslant 2.$$

Сада ћемо доказати једну теорему користећи неједнакост (1), тј. теорему 1.

Теорема 2. *Ако је* $n = 2, 3, \ldots$ *и* $-1 < x < \dfrac{1}{n-1}$, *тада је*

$$(1+x)^n \leqslant 1 + \frac{nx}{1+(1-n)x}, \tag{3}$$

са једнакошћу ако и само ако је $x = 0$.

Доказ. Примјењујући неједнакост (1) на $\left(1 - \dfrac{x}{1+x}\right)^n$, добијамо:

$$\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^n \geqslant 1 - n \cdot \frac{x}{1+x}, \tag{4}$$

гдје је $n = 1, 2, \ldots$ и $\dfrac{-x}{1+x} > -1$ јер је $x > -1$. Међутим, $1 - \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$, тако да је (4) еквивалентно са

$$\frac{1}{(1+x)^n} \geqslant \frac{1+x-nx}{1+x}.$$

Ако је $1 + x - nx > 0$ и $n = 2, 3, \ldots$ (тј. $x < \dfrac{1}{n-1}$), тада је

$$(1+x)^n \leqslant \frac{1+x}{1+x-nx} = 1 + \frac{nx}{1+(1-n)x}.$$

Овим је доказана неједнакост (3). ■

Сада ћемо дати једну генерализацију неједнакости (1).

Теорема 3. *Ако је сваки од реалних бројева* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *већи од* -1 *и ако су или сви позитивни или сви негативни, тада је*

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) > 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{5}$$

Доказ. За $n = 2$ неједнакост је тачна јер важи

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 > 1 + x_1 + x_2.$$

Претпоставимо да (5) важи за неко $n \geqslant 2$. Тада за $n+1$ имамо

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)(1+x_{n+1}) &> (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})\\ &> 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+x_{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\ &> 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}.\end{aligned}$$

Овим је доказ математичком индукцијом завршен, тј. неједнакост (5) је тачна. Наравно, неједнакост (1) добијамо из (5) за $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. ■

Доказаћемо сада сљедећу генерализацију Бернулијеве неједнакости (1).

Теорема 4. *Нека су* x, a *реални бројеви,* $x \geqslant -1$ *и* $0 < a < 1$. *Тада је*

$$(1+x)^a \leqslant 1 + ax. \tag{6}$$

Ако је $x \geqslant -1$ *и* $a < 0$ *или* $a > 1$, *тада је*

$$(1+x)^a \geqslant 1 + ax. \tag{7}$$

Једнакост у (6) и (7) важи само у случају када је $x = 0$.

Доказ. Размотримо најпре случај када је a рационалан број, и то позитиван прави разломак. Нека је $a = \dfrac{m}{n}$, гдје су m и n природни бројеви и при томе је $m < n$. Тада на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине n позитивних бројева слиједи

$$\begin{aligned}(1+x)^a = (1+x)^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} \\ &\leqslant \frac{(1+x)+\cdots+(1+x)+1+\cdots+1}{n} \\ &= \frac{m(1+x)+n-m}{n} = \frac{n+mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}\,x = 1+ax,\end{aligned}$$

тј. $(1+x)^a \leqslant 1+ax$. Једнакости важи ако су сабирци у неједнакости $A \geqslant G$ једнаки, тј. ако је $1+x=1$, тј. $x=0$. За $x \neq 0$, важи $(1+x)^a < 1+ax$. Овим је доказана неједнакост (6) у случају када је a $(0<a<1)$ рационалан број.

Нека је сада a, $0<a<1$ ирационалан број. Нека је $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ један низ правих разломака који тежи ка a. Из неједнакости

$$(1+x)^{r_n} \leqslant 1 + r_n x, \qquad x > -1,\ n = 1,2,\ldots,$$

коју смо горе доказали (у случају када је експонент рационалан број), слиједи

$$(1+x)^a = \lim_{n\to\infty} (1+x)^{r_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} (1 + r_n x) = 1 + ax.$$

Овим је неједнакост (6) такође доказана за ирационалне вриједности a. Преостаје нам још да докажемо да за $x \neq 0$ и $0<a<1$ важи $(1+x)^a < 1+ax$, тј. да за $x \neq 0$ у (6) не важи знак једнакости.

У сврху овог доказа изаберимо један рационалан број r, такав да је $a<r<1$. Очигледно важи

$$(1+x)^a = \left[(1+x)^{\frac{a}{r}}\right]^r.$$

Због $0 < \dfrac{a}{r} < 1$, на основу горе доказаног важи $(1+x)^{\frac{a}{r}} \leqslant 1 + \dfrac{a}{r}\,x$. Сљеди да је $(1+x)^a \leqslant \Big(1+\dfrac{a}{r}\,x\Big)^r$. За $x \neq 0$ важи $\Big(1+\dfrac{a}{r}\,x\Big)^r < 1 + r\cdot\dfrac{a}{r}\,x = 1+ax$, одакле

$$(1+x)^a < 1+ax.$$

Овим је неједнакост (6) у потпуности доказана.

Пређимо сада на доказ неједнакости (7). Нека је $a>1$. Ако је $1+ax<0$ (то је могуће; нпр. ако је $a=4$, $x=-\dfrac{1}{2}$, тада је $1+ax=-1<0$), тада је неједнакост (7) тачна јер је тада њена лијева страна ненегативна, а десна страна је негативна. Ако је $1+ax \geqslant 0$, тј. $ax \geqslant -1$, тада на основу неједнакости (6) слиједи

$$(1+ax)^{\frac{1}{a}} \leqslant 1 + \frac{1}{a}\cdot ax = 1+x,$$

при чему једнакост важи само у случају када је $x=0$. Ако степенујемо обје стране горње неједнакости са a, добијамо

$$1+ax \leqslant (1+x)^a.$$

Нека је сада $a < 0$. Ако је $1 + ax < 0$, тада неједнакост (7) очигледно важи. Ако је $1+ax \geqslant 0$, изаберимо један природан број n тако да је $-\dfrac{a}{n} < 1$. На основу неједнакости (6) важи

$$(1+x)^{-\frac{a}{n}} \leqslant 1 - \frac{a}{n}\,x,$$

а одавде

$$(1+x)^{\frac{a}{n}} \geqslant \frac{1}{1-\dfrac{a}{n}\,x} \geqslant 1 + \frac{a}{n}\,x$$

(последња неједнакост је тачна због $1 \geqslant 1 - \dfrac{a^2}{n^2}\,x^2$). Степеновањем последње неједнакост са n добијамо

$$(1+x)^a \geqslant \Big(1 + \frac{a}{n}\,x\Big)^a \geqslant 1 + n\cdot\frac{a}{n}\,x = 1 + ax,$$

а ово је неједнакост (7). Примјетимо да је једнакост могућа ако је $x = 0$. Овим је теорема у потпуности доказана. ∎

Важи сљедећа генерализација неједнакости (6) и (7).

Теорема 5. *Вриједе неједнакости*

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{p_i} \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \tag{8}$$

ако $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset (-\infty, 0)$ *или* $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset (1, +\infty)$, *те* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (0, +\infty)$ *или* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (-1, 0)$, $n \geqslant 1$. *Једнакост важи у случају* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{p_i} \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \tag{9}$$

ако $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset (0, 1)$ *те* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (0, +\infty)$ *или* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (-1, 0)$, $n \geqslant 1$. *Једнакост важи у случају* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

За доказе ових неједнакости треба користити неједнакости (6) и (7). Препуштамо их читаоцима овог чланка.

Сада ћемо показати како се помоћу неједнакости (6) и (7) ефикасно може извршити процјена неких одређених интеграла.

Примјер 1. Нека је $f\colon [1, 2] \to (0, +\infty)$ интеграбилна функција. Ако је $\int_1^2 f^2(x)\,dx \leqslant 2$, доказати да важи неједнакост

$$\int_1^2 [1 + f(x)]^{\frac{1}{x}}\,dx \leqslant 2.$$

Рјешење. На основу Бернулијеве неједнакости (6) (због $1 \leqslant x \leqslant 2$) добијамо

$$[1 + f(x)]^{\frac{1}{x}} \leqslant 1 + \frac{1}{x}\,f(x),$$

а сада на основу неједнакости Коши-Буњаковски-Шварца (Cauchy-Buniakowsky-Schwarz):

$$\int_1^2 [1+f(x)]^{\frac{1}{x}}\,dx \leqslant \int_1^2 \left[1+\frac{1}{x}\,f(x)\right]\,dx = \int_1^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,f(x)\,dx$$
$$\leqslant 1+\sqrt{\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx\cdot\int_1^2 f^2(x)\,dx} \leqslant 1+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2} = 2.$$

Примјер 2. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{4}{3} \leqslant \int_0^1 e^{x^2} dx \leqslant \frac{e+2}{3}.$$

Рјешење. Поћи ћемо од познате неједнакости $e^t \geqslant t+1$, $t \geqslant 0$. За $t = x^2$ добијамо

$$e^{x^2} \geqslant x^2+1. \tag{$*$}$$

Сада на основу Бернулијеве неједнакости (6) (овдје је $x \in [0,1]$), добијамо:

$$e^{x^2} = [1+(e-1)]^{x^2} \leqslant 1+(e-1)x^2, \quad x \in [0,1].$$

Сада имамо због $(*)$:

$$x^2+1 \leqslant e^{x^2} \leqslant 1+(e-1)x^2, \quad x \in [0,1],$$

а одавде након интеграције:

$$\int_0^1 (x^2+1)\,dx \leqslant \int_0^1 e^{x^2} dx \leqslant \int_0^1 [1+(e-1)x^2]\,dx,$$

односно

$$\frac{4}{3} \leqslant \int_0^1 e^{x^2} dx \leqslant 1+\frac{e-1}{3} = \frac{e+2}{3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar d.o.o., Sarajevo, 2006.
2. Korowkin, P.P., *Ungleichungen*, Veb Deutscherr Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.
3. Maftei, I.V., Popescu, P.G., Piticari, M., Lupa, C., Tataram, M.A., *Inegalităti Alese in Matematică, Inegalităti clasice*, Editura NICULESCU, 2005.
4. Mitrinović, D.S., *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.
5. Pečarić, J., *Nejednakosti*, Hrvatsko matemati ch ko drutvo, Element, Zagreb, 1996.

E-mail: `asefket@pmf.unsa.ba`