Љубиша Динић

ПОВРШИНА ЛОПТЕ (СФЕРЕ)

Час обраде новог градива у ОШ „Ћеле кула“ у Нишу

Уводни део часа

Подсетимо се да смо у седмом разреду обрађивали обим и површину круга, као и обим и површину правилних многоуглова, а да смо у седмом и на почетку осмог разреда обрађивали сличност троуглова. У другом полугодишту осмог разреда смо обрађивали купу, а кроз задатке је добро радити и зарубљену купу применом сличности.

Питање за подсећање: Шта је то правилни многоугао?

Очекивани одговор: Многоугао је правилан када има све унутрашње углове једнаке и све странице подударне. Око правилног многоугла може да се опише и у њега може да се упише круг.

П. Како гласе формуле за површину и обим круга?

О. Површина круга се израчунава по обрасцу $P = \pi r^2$, а обим по обрасцу $O = 2\pi r$, где је r полупречник круга, а π је константа (приближно једнака 3,1415).

П. Када су два троугла слична?

О. Два троугла су слична када имају одговарајуће углове једнаке и одговарајуће странице пропорционалне.

Главни део часа

Посматрајмо неке познате природне објекте (пројектују се слике Сунца и Месеца, као и слика Земље начињена из свемира).

П. Какав облик имају ови нама познати природни објекти?

О. Они имају облик лопте.

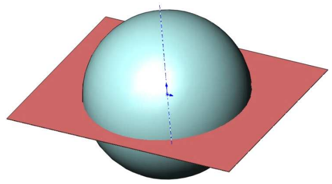
П. Шта је лопта, а шта је сфера?

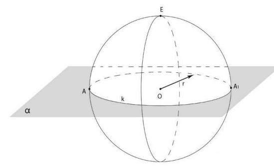
О. Сферу чине све тачке у простору на једнаком растојању од једне сталне тачке (центра сфере). Тачке чије је растојање од центра мање или једнако од датог броја чине лопту.

П. Како гласи образац за површину омотача купе?

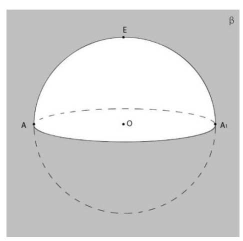
О. Површина омотача купе рачуна се по обрасцу $M = \pi rs$, где је r полупречник основе купе, а s дужина њене изводнице.

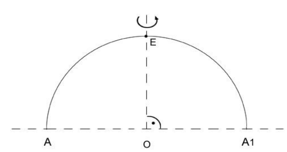
Посматрајмо сада неку дату лопту (са центром O и полупречником r) и пресецимо је једном равни (α) која садржи њен центар (приказујемо леву слику помоћу пројектора и истовремено цртамо на табли одговарајућу десну скицу). Та раван дели лопту на два подударна дела – две полулопте. Пресек лопте са датом равни је „велики круг“ лопте $K(O, r)$, а одговарајућа кружница (дакле, пресек сфере са датом равни) је „велика кружница“ лопте $k(O, r)$.



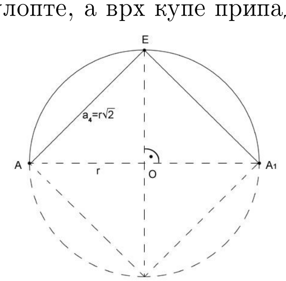


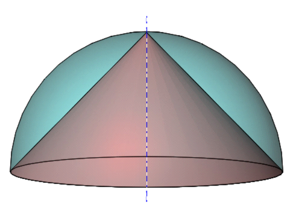
Посматрајмо једну од две полулопте (на пример, „горњу“) и пресецимо је још једном равни (β) која такође садржи центар лопте и нормална је на раван датог великог круга. Пресек полулопте и равни β је нови полукруг. Обележимо са E тачку полукружнице (добијеног полукруга) која има особину да јој се нормална пројекција на раван α поклапа са центром O дате лопте. Тачке E и O одређују праву која је оса ротације лопте. Наиме, ротацијом (обртањем) велике кружнице $k(O, OE)$ око осе OE добија се дата сфера, а обртањем великог круга $K(O, OE)$ дата лопта.





Упишимо сада у добијени полукруг половину квадрата (правилног четвороугла) AEA_1. Страница тог квадрата једнака је, на основу Питагорине теореме, $a_4 = r\sqrt{2}$. Обртањем полукруга и у њему уписаног дела квадрата око осе OE добија се полулопта и у њу уписана купа (тј. основа купе поклапа се са великим кругом полулопте, а врх купе припада полусфери), видети десну слику.



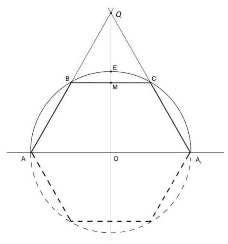


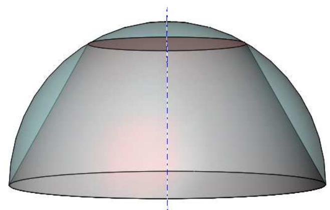
Израчунајмо површину омотача M_4 добијене купе. Према формули $M_4 = \pi r s$, и како је $s = a_4 = r\sqrt{2}$, добијамо да је

$$M_4 = \pi r^2 \sqrt{2}.$$

Однос површине омотача купе и површине великог круга лопте износи

$$\frac{M_4}{B} = \frac{\pi r^2 \sqrt{2}}{\pi r^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4142.$$





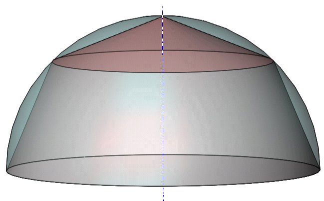
У посматрани полукруг упишимо сада део $ABCA_1$ правилног шестоугла, али тако да оса ротације OE полови страницу BC и нормална је на њој. Дужина странице шестоугла је $a_6 = r$. Ротацијом тог дела шестоугла добија се омотач тела које се зове зарубљена купа, као и једна њена, мања, основа (видети десну слику коју пројектујемо). Израчунајмо укупну површину M_6 тог омотача и мање основе купе. Са леве слике лако закључујемо да она износи

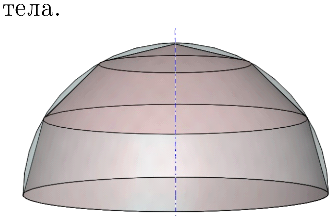
$$\begin{aligned} M_6 &= \pi \cdot AO \cdot AQ - \pi \cdot BM \cdot BQ + \pi \cdot BM^2 \\ &= \pi \cdot r \cdot 2r - \pi \cdot \frac{r}{2} \cdot r + \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \\ &= \pi r^2 \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}\pi r^2. \end{aligned}$$

Ова величина се према површини великог круга лопте односи као

$$\frac{M_6}{B} = \frac{\frac{7}{4}\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

Настављајући овај поступак, можемо сада да уписујемо у дати велики полукруг лопте правилне многоуглове са 8, 10, 12, ... страница. Наравно, добијене слике, а и изрази за површине обртних тела ће се прилично компликовати. Ипак, они се могу израчунати (случај када се уписује осмоугао можемо обрадити на часу додатне наставе). Овде ћемо само пројектовати слике које се добијају када се упишу и ротирају делови правилног осмоугла и дванаестоугла и навести коначне изразе за одговарајуће површине обртних тела.





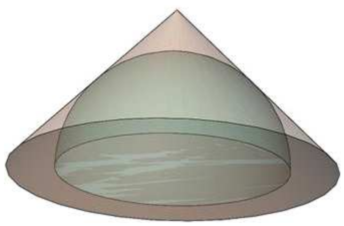
$$\begin{aligned} M_8 &= \pi r^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot (1 + \sqrt{2}) \approx 1{,}8478 \cdot \pi r^2, \\ M_{12} &= \pi r^2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 1{,}9319 \cdot \pi r^2. \end{aligned}$$

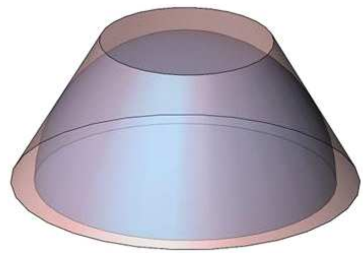
Одговарајући односи са површином великог круга су:

$$\frac{M_8}{B} \approx 1{,}8478, \qquad \frac{M_{12}}{B} \approx 1{,}9319.$$

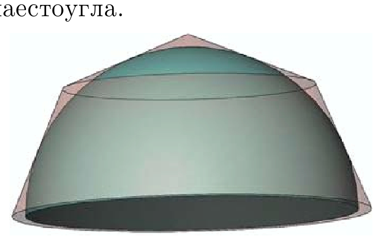
Како је површина P полулопте, јасно, већа од сваке од површина добијених обртних тела, то мора да важи следећи низ неједнакости

$$1{,}4142 < 1{,}75 < 1{,}8478 < 1{,}9319 < \cdots < \frac{P}{B}.$$





Шта ће се догодити ако поновимо сличан поступак, али сада са описаним многоугловима око датог полукруга, и са помоћу ротације добијеним фигурама описаним око полулопте? Посматрајмо одговарајуће слике које се на тај начин добијају обртањем правилног четвороугла (квадрата), шестоугла, осмоугла и дванаестоугла.



Сличним поступком као у случају уписаних фиугра, добијају се следећи изрази за површине описаних фигура $\overline{M}_4$, $\overline{M}_6$, $\overline{M}_8$, $\overline{M}_{12}$:

$$\begin{aligned}
\overline{M}_4 &= 2\sqrt{2}\cdot \pi r^2 \approx 2{,}8284\pi r^2,\\
\overline{M}_6 &= \frac{7}{3}\pi r^2 \approx 2{,}3333\pi r^2,\\
\overline{M}_8 &\approx 2{,}1844\pi r^2,\\
\overline{M}_{12} &\approx 2{,}0858\pi r^2.
\end{aligned}$$

Како су те површине свакако веће од површине полулопте, то закључујуемо да мора да важи следећи низ неједнакости:

$$2{,}8284 > 2{,}3333 > 2{,}1844 > 2{,}0858 > \frac{P}{B}.$$

Намеће се закључак да је уствари

$$\frac{P}{B} = 2,$$

тј. да се површина полулопте може изразити као

$$P = 2B = 2\pi r^2.$$

Другим речима, површина целе лопте (сфере) израчунава се по обрасцу

$$P_{\text{лопте}} = 4\pi r^2.$$

Завршни део часа

Урадимо сада следећа два задатка.

1. Израчунај површину лопте ако је њен пречник 10 cm. [Одговор: $P = 100\pi\,\mathrm{cm}^2$.]
2. Нaђи однос површине лопте полупречника r и купе полупречника основе r и висине $H = 2r$. [Одговор: $(1+\sqrt{5}):4$.]

За домаћи дати задатке из уџбеника или збирке које наставник користи, а такође и следећи задатак:

1. Показати да се површине фигура које се добијају ротацијом половине описаног квадрата, односно правилног шестоугла око полулопте полупречника r могу изразити као $\overline{M}_4 = 2\sqrt{2}\cdot\pi r^2$, односно $\overline{M}_6 = \dfrac{7}{3}\pi r^2$.

Захваљујем се на урађеним сликама дипл. инг Драгану Јовановићу, асистенту Машинског факултета у Нишу, и Владимиру Милосављевићу, студенту високе техничке школе у Нишу.

ОШ „Ћеле кула“, Ниш
E-mail: ljubadinic@gmail.com