Драгољуб Милошевић, Борисав Симић

ЈЕДНА ОСОБИНА ПРАВИЛНОГ ТРИНАЕСТОУГЛА

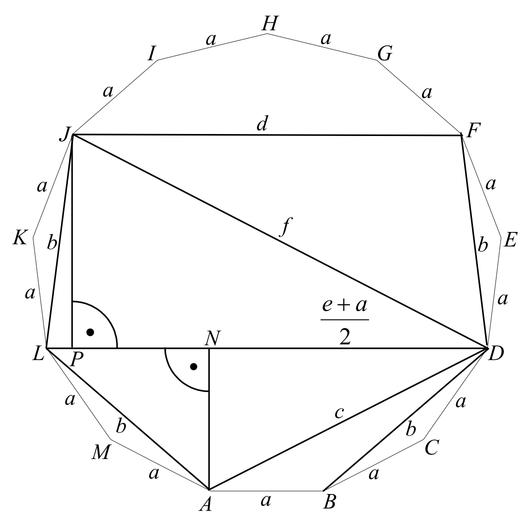
Даћемо четири доказа теореме:

У правилном тринаестоуглу $ABCDEFGHIJKLM$ важи једнакост $\dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AD}{AF} = 1$.

Доказ 1. Уводимо следеће ознаке: $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $AE = d$, $AF = e$, $AG = f$. Тада наведена једнакост постаје

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{e} = 1. \tag{$*$}$$

Правилни тринаестоугао $ABCDEFGHIJKLM$ је осно симетрична фигура, што значи да је четвороугао $ABDL$ једнакокраки трапез (слика 1).



Слика 1

Нека је $AN \perp LD$, $N \in LD$. Тада је $LN = \dfrac{e-a}{2}$ и $ND = \dfrac{e+a}{2}$. Применом Питагорине теореме на правоугле троуглове ANL и AND добијамо

$AN^2 = AL^2 - LN^2 = b^2 - \left(\frac{e-a}{2}\right)^2$ и $AN^2 = AD^2 - ND^2 = c^2 - \left(\frac{e+a}{2}\right)^2$, одакле је $b^2 - \left(\frac{e-a}{2}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{e+a}{2}\right)^2$, а одавде је

$$c^2 - b^2 = ae. \tag{1}$$

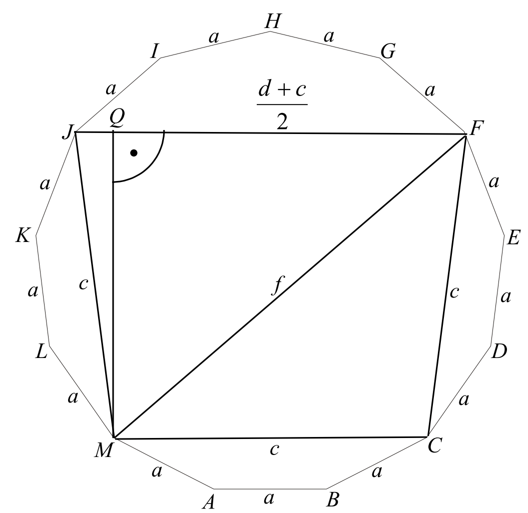
Аналогно, применом Питагорине теореме на једнакокраки трапез $LDFJ$ добијамо

$$f^2 - b^2 = de, \tag{2}$$

а применом на једнакокраки трапез $MCFJ$ (слика 2) добијамо

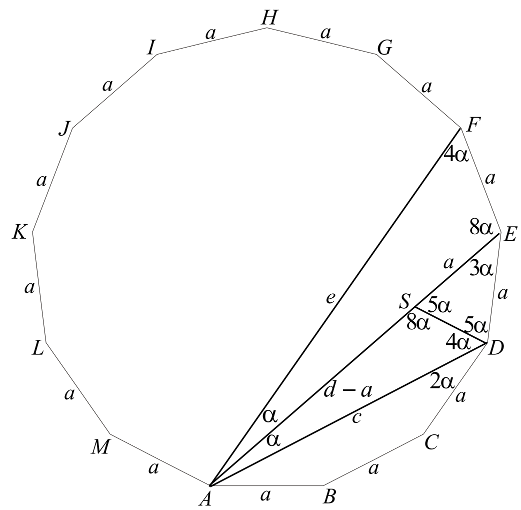
$$f^2 - c^2 = cd. \tag{3}$$

Ако од збира једнакости (1) и (3) одузмемо једнакост (2), имамо $0 = ae + cd - de$, тј. $ae + cd = de$. Дељењем последње једнакости са de добијамо тражену једнакост $(*)$.



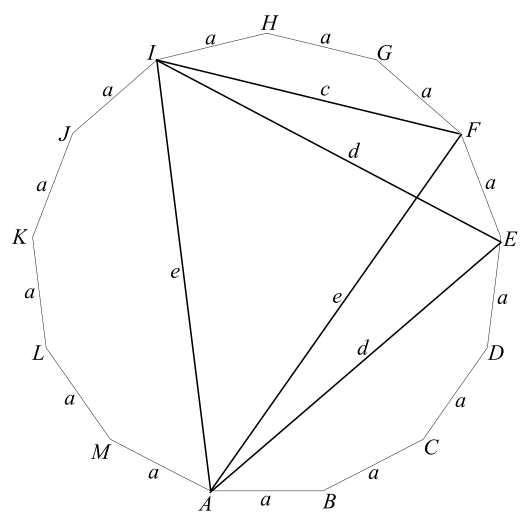
Слика 2

Доказ 2. Нека је 2α величина централног угла над страницом датог тринаестоугла. Тада је $2\alpha = \frac{2\pi}{13}$, тј. $13\alpha = \pi$. Одговарајући периферијски угао је α. С обзиром да је спољашњи угао једнак централном углу, то је унутрашњи угао правилног тринаестоугла једнак $13\alpha - 2\alpha = 11\alpha$. Тада је $\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = 11\alpha - \alpha = 10\alpha$, па је $\angle ADC = 2\alpha$. Даље, у троуглу ADE је $\angle ADE = 9\alpha$ и $\angle AED = 2\alpha$, а у троуглу AEF: $\angle AEF = 8\alpha$ и $\angle AFE = 4\alpha$. На дијагонали $AE = d$ одредимо тачку S тако да је $SE = DE = a$ (слика 3). Тада је $\angle SDE = \angle DSE = (13\alpha - 3\alpha) : 2 = 5\alpha$, па је $\angle ASD = 8\alpha$ и $\angle ADS = 4\alpha$. Троуглови ADS и AEF имају једнаке углове, што значи да су слични. Из те сличности произлази $AD : DF = (AE - SE) : AE$, тј. $c : e = (d - a) : d$. Ова једнакост је еквивалентна са једнакошћу $(*)$.



Слика 3

Доказ 3. На основу Птоломејеве теореме примењене на тетивни четвороугао $AEFI$ (слика 4), добијамо $AF \cdot EI = AE \cdot FI + EF \cdot AI$, тј. $ed = dc + ae$, а одавде директно следи $(*)$.



Слика 4

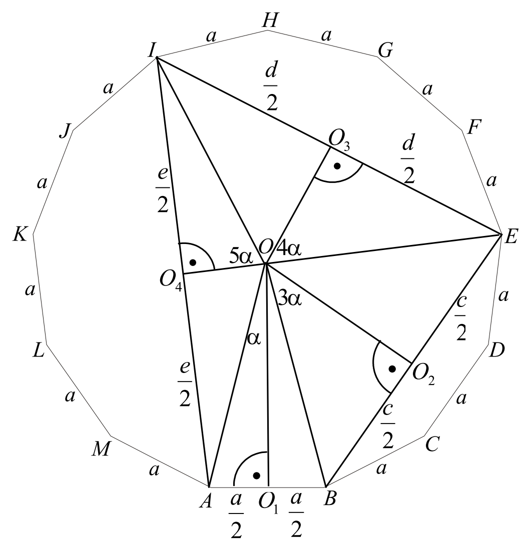
Доказ 4. С обзиром да је $13\alpha = \pi$, можемо писати да је $9\alpha = \pi - 4\alpha$ и $7\alpha = \pi - 6\alpha$, па имамо $\cos 9\alpha = \cos(\pi - 4\alpha) = -\cos 4\alpha$ и $\cos 7\alpha = \cos(\pi - 6\alpha) = -\cos 6\alpha$, односно $\cos 9\alpha + \cos 4\alpha = 0$ и $\cos 7\alpha + \cos 6\alpha = 0$. Одузимањем друге једнакости од прве добијамо $\cos 9\alpha + \cos 4\alpha - \cos 7\alpha - \cos 6\alpha = 0$, што је еквивалентно са

$$(\cos 4\alpha - \cos 6\alpha) + (\cos \alpha - \cos 7\alpha) = \cos \alpha - \cos 9\alpha. \tag{4}$$

Трансформацијом разлике косинуса у производ, једнакост (4) добија облик

$$\sin \alpha \sin 5\alpha + \sin 3\alpha \sin 4\alpha = \sin 4\alpha \sin 5\alpha. \tag{5}$$

Како је $\sin \alpha = \dfrac{a}{2R}$, $\sin 3\alpha = \dfrac{c}{2R}$, $\sin 4\alpha = \dfrac{d}{2R}$ и $\sin 5\alpha = \dfrac{e}{2R}$ (R – полупречник описаног круга око правилног 13-оугла), слика 5, једнакост (5) је еквивалентна са $ea + dc = bd$, односно са траженом једнакошћу $(*)$.



Слика 5

Напомена. Једнакост $(*)$ се може доказати и методом координата.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

E–mail: dramil47@gmail.com