Алија Муминагић

О ЈЕДНОМ ИНТЕРЕСАНТНОМ ЗАДАТКУ СА КОРЈЕНИМА

У овом чланку дајемо више рјешења за познати задатак:

Доказати једнакост $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$ (1)

Задатак је из категорије „ни тежак, ни лак“ (ипак прије „тежак“), а назваћемо га рутинксим, јер даје праксу за примјену, само за куб збира и разлике двају бројева и рачунске операције са корјенима.

Рјешење 1. Једнакот (1) еквивалентна је с једнакошћу

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3 = \sqrt[3]{2} - 1. \tag{2}$$

Дајемо доказ „с лијева на десно“ за једнакост (2):

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3 = \left[\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right) + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right]^3 \\
&= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{4}{9}} + 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3 \\
&= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^3 \\
&\quad + 3\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\left[\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^2 - 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2\right] + 3\sqrt[3]{\frac{4^2}{9^2}}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right) + \left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3 \\
&= \frac{1}{9} - 3\sqrt[3]{\frac{2}{9^3}} + 3\sqrt[3]{\frac{2^2}{9^3}} - \frac{2}{9} + 3\sqrt[3]{\frac{4}{9^3}} - 6\sqrt[3]{\frac{8}{9^3}} + 3\sqrt[3]{\frac{16}{9^3}} + 3\sqrt[3]{\frac{16}{9^3}} - 3\sqrt[3]{\frac{32}{9^3}} + \frac{4}{9} \\
&= \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{3}{9}\sqrt[3]{2} + \frac{3}{9}\sqrt[3]{4} + \frac{3}{9}\sqrt[3]{4} - \frac{12}{9} + \frac{6}{9}\sqrt[3]{2} + \frac{6}{9}\sqrt[3]{2} - \frac{6}{9}\sqrt[3]{4} \\
&= -\frac{9}{9} + \frac{9}{9}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} - 1.
\end{aligned}$$

Ово рјешење је „tour de force“ (мучан посао), али у настави су некад и таква рјешења нужна.

Сигурно је да ће се међу ученичким рјешењима наћи и оваква:

Рјешење 2.

$$\Big(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\Big)^3=\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\Big)^3=\Big(\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\Big)^3$$
$$=\frac{(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^2}{9}=\frac{[(1-\sqrt[3]{2})+\sqrt[3]{4}]^3}{9}=\cdots=\sqrt[3]{2}-1,$$

што је у односу на рјешење 1 и лакше и елегантније.

Рјешење 3. Нека је $x=\sqrt[3]{2}$. Тада је дата једнакост (1) еквивалентна са

$$\sqrt[3]{x-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}-\frac{x}{\sqrt[3]{9}}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{9}}\iff 9x-9=[(1-x)+x^2]^3.$$

Сада је још лакше утврдити да је за $x=\sqrt[3]{2}$ ($x^3=2$, $x^6=4$), посљедња једнакост тачна, па је тачна и њој еквивалентна једнакост (1).

Рјешење 4. Десну страну у датој једнакости (1), уз коришћење формула $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, трансформишемо на овај начин:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{(\sqrt[3]{2})^3+1}{\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}+1)}=\frac{3}{\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}+1)}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$$
$$=\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}(\sqrt[3]{2}+1)}=\sqrt[3]{\frac{3}{(\sqrt[3]{2}+1)^3}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2+3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1}}=\sqrt[3]{\frac{3}{3(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}-1}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2})^3-1}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}.$$

Рјешење 5. Ставимо да је $x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ и $y=\sqrt[3]{2}$. Тада је $y^3=2$ и $x=\sqrt[3]{y-1}$. Сада имамо

$$y^3=2\implies y^3-1=1\implies 1=(y-1)(y^2+y+1),\tag{3}$$

а због $y^3+1=3$ је

$$y^2+y+1=\frac{1}{3}(3y^2+3y+3)=\frac{1}{3}(3y^2+3y+y^3+1)=\frac{1}{3}(y+1)^3.\tag{4}$$

Сада из (3) и (4) добијамо да је

$$x^3=y-1=\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{3}{(y+1)^3},\ \text{па је } x=\frac{\sqrt[3]{3}}{y+1}.\tag{5}$$

Такође имамо $3=y^3+1=(y+1)(y^2-y+1)$, а одатле

$$\frac{1}{y+1}=\frac{y^2-y+1}{3}.\tag{6}$$

Коначно, из (5) и (6) слиједи

$$x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}(y^2-y+1)=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}((\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1)=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3})$$
$$=\sqrt[3]{\frac{12}{27}}-\sqrt[3]{\frac{6}{27}}+\sqrt[3]{\frac{3}{27}}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}},$$

што је и требало доказати.

Слично доказујемо да су тачне и сљедеће једнакости:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}}-\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+\sqrt[3]{\frac{8}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}-2},\quad \sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{8}{9}}+\sqrt[3]{\frac{16}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{128}-4}.$$

Наслућујемо да важи

$$\sqrt[3]{\frac{2^{n-1}}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2^n}{9}}+\sqrt[3]{\frac{2^{n+1}}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{3n-2}}-2^{n-1}},\quad n\in\mathbf{N}. \tag{7}$$

Доказ. Тврђење (7) ћемо доказати математичком индукцијом. Имамо:

1° За $n=1$ тврђење је тачно (видјети претходна рјешења).

2° Нека је тврђење (7) тачно за неко $n\geqslant 1$. Множећи ту релацију са $\sqrt[3]{2}$ добијамо

$$\sqrt[3]{\frac{2\cdot 2^{n-1}}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2\cdot 2^n}{9}}+\sqrt[3]{\frac{2\cdot 2^{n+1}}{9}}=\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2^{3n-2}}-2\cdot 2^{n-1}},$$

а одатле

$$\sqrt[3]{\frac{2^n}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2^{n+1}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{2^{n+2}}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{3n+1}}-2^n},$$

што значи да тврђење (7) важи и за $n+1$. Тиме је доказано да (7) важи за све $n\in\mathbf{N}$.

Рјешења 4 и 5, као и генерализација, изван рутине су и отварају могућност уласка у креативност и оригиналност.

Ако се неко од читалаца запитао како долазимо до рационалних бројева $\frac{1}{9}$, $-\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$ у једнакости (1), може да формулише овакав задатак:

Одредити рационалне бројеве a, b, c тако да је

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

Тада је овај чланак у потпуности оправдао свој циљ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Časopis *Matematik Magasinet* (Danska), Nr. 45, april 2009.
2. В. А. Кречмар, *Задачник по алгебре*, Наука, Москва 1968.
3. И. Х. Сивашински, *Теореми и задачи по алгебре и элементарным функциям*, Наука, Москва 1971.

Nykøbing, F., Danmark

E–mail: `fatima.muminagic@gmail.com`